FOURIER SERIES

M. I. VISHIK

Representation of any periodic function as a sum of corresponding trigonometric series, known as its Fourier series expansion, is discussed. Parseval equation is presented: integral of a squared periodic function in a period-long interval is proportional to the sum of squared coefficients of the function's Fourier series.

Дается представление любой периодической функции в виде суммы соответствующего ей тригонометрического ряда, называемого ее рядом Фурье. Приводится равенство Парсеваля: интеграл от квадрата периодической функции по интервалу длины периода равен с точностью до постоянного множителя сумме квадратов коэффициентов при тригонометрических функциях в ее разложении в ряд Фурье.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

М. И. ВИШИК

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПЕРИОДА 2π

Тригонометрические функции периода T имеют вид

$$\cos n\frac{2\pi}{T}x, \quad \sin n\frac{2\pi}{T}x, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

С помощью замены переменной $2\pi x/T = y$ в (1) получаются тригонометрические функции

$$\cos ny, \quad \sin ny, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

имеющие период 2π. Поэтому для простоты в дальнейшем будем рассматривать тригонометрические функции вида (2), причем вместо y будем писать x.

Дополним тригонометрические функции периода 2π еще функцией, тождественно равной 1, и получим систему функций

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \ldots \tag{3}$$

Эти функции обладают следующим важным свойством:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cdot g(x)dx = 0, \tag{4}$$

если вместо $f(x)$ и $g(x)$ подставить любые из указанных в (3) две различные функции. Таким образом, утверждается

$$\int_0^{2\pi} 1\cdot\cos nx dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} 1\cdot\sin nx dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos mx dx = 0, \tag{6}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx dx = 0, \quad k \neq m,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos mx dx = 0 \quad \text{при любых } k, m = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Действительно, имеем, например,

$$\int_0^{2\pi} 1\cdot\cos nx dx = \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{x=0}^{x=2\pi} = 0.$$

Далее, согласно известной формуле,

$$\sin kx \sin mx = \frac{1}{2}(\cos(k-m)x - \cos(k+m)x)$$

имеем

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \cos(k-m)x dx - \int_0^{2\pi} \cos(k+m)x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k-m)x}{k-m}\Bigg|_{x=0}^{x=2\pi} - \frac{\sin(k+m)x}{k+m}\Bigg|_{x=0}^{x=2\pi}\right) = 0$$

при $k \neq m$. Аналогично устанавливаются и другие формулы (5)–(7).

В дальнейшем нам понадобятся еще интегралы вида

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx, \qquad (8)$$

где $f(x)$ – любая из функций (3).

Имеем

$$\int_0^{2\pi} 1^2 dx = 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2nx}{2}\right)dx = \pi + \frac{\sin 2nx}{4n}\Bigg|_{x=0}^{x=2\pi} = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2nx}{2}\right)dx = \qquad (9)$$

$$= \pi - \frac{\sin 2nx}{4n}\Bigg|_{x=0}^{x=2\pi} = \pi.$$

Обозначим интеграл, стоящий слева в равенстве (4), через $(f(x), g(x))$:

$$(f(x), g(x)) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx. \qquad (10)$$

Заметим, что форма $(f(x), g(x))$ обладает рядом свойств, аналогичных скалярному произведению $(\vec{a}, \vec{b})$ двух векторов $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2)$ на плоскости:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 \qquad (11)$$

(a_1, a_2 и b_1, b_2 – координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$).

Действительно, скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b})$ обладает, например, следующими свойствами:

$$(\vec{a}^1 + \vec{a}^2, \vec{b}) = (\vec{a}^1, \vec{b}) + (\vec{a}^2, \vec{b}),$$
$$(\vec{a}, \vec{b}^1 + \vec{b}^2) = (\vec{a}, \vec{b}^1) + (\vec{a}, \vec{b}^2), \qquad (12)$$
$$(\vec{a}, \vec{a}) > 0, \quad \text{если} \quad \vec{a} \neq 0,$$

для любых двумерных векторов $\vec{a}, \vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{b}, \vec{b}^1, \vec{b}^2$.

Аналогичными свойствами обладает форма $(f(x), g(x))$, заданная формулой (10):

$$(f_1(x) + f_2(x), g(x)) = \int_0^{2\pi} (f_1(x) + f_2(x))g(x)dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} f_1(x)g(x)dx + \int_0^{2\pi} f_2(x)g(x)dx =$$

$$= (f_1(x), g(x)) + (f_2(x), g(x)), \qquad (13)$$

$$(f(x), g_1(x) + g_2(x)) = (f(x), g_1(x)) + (f(x), g_2(x)), \qquad (14)$$

$$(f(x), f(x)) = \int_0^{2\pi} f^2(x)dx > 0, \quad \text{если} \quad f(x) \not\equiv 0, \qquad (15)$$

и $f(x)$ – непрерывная функция. В связи с такой аналогией между свойствами (12) скалярного произведения $(\vec{a}, \vec{b})$ векторов в евклидовом пространстве и свойствами (13)–(15) формы $(f(x), g(x))$ последнюю называют скалярным произведением функций $f(x)$ и $g(x)$.

Аналогом формулы $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$ для квадрата длины вектора $\vec{a}$ является формула (15). Скалярное произведение $(f(x), f(x))$ обозначают $\|f(x)\|^2$ и называют квадратом нормы функции $f(x)$:

$$(f(x), f(x)) = \int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \|f(x)\|^2. \qquad (16)$$

Как известно, если скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ и $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны. Аналогично, если $(f(x), g(x)) = 0$, то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ ортогональны. Поэтому свойства (5)–(7) называют свойством ортогональности функций 1, $\cos nx$, $\sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$

Аналогично устанавливается ортогональность системы функций 1, $\cos n\frac{2\pi}{T}x$, $\sin n\frac{2\pi}{T}x$, $n = 1, 2, \ldots$, на интервале длиной T, то есть справедливость формул, аналогичных формулам (5)–(7) с заменой пределов интегрирования 0, 2π на 0, T.

2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ С ПЕРИОДОМ 2π

Тригонометрическим полиномом периода 2π называется любая функция вида

$$P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \qquad (17)$$

Очевидно, $P(x) = P(x + 2\pi)$, $-\infty < x < +\infty$, поэтому периодическая функция $P(x)$ однозначно задается своими значениями на любом интервале длины периода, например на интервале $(0, 2\pi)$. Зная значения функции на этом интервале, можно найти ее значения для любого x вне интервала $(0, 2\pi)$, пользуясь периодичностью $P(x)$. Покажем, что коэффициенты a_0, a_k, b_k, $k = 1, 2, ...$, в (17) однозначно определяются значениями функции $P(x)$ на интервале $(0, 2\pi)$, и найдем формулы, выражающие значения этих коэффициентов через $P(x)$. Для этого умножим обе части (17) на $\cos mx$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до 2π. Получим

$$\int_0^{2\pi} P(x)\cos mx\,dx = a_0 \int_0^{2\pi} \cos mx\,dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \int_0^{2\pi} \cos kx \cos mx\,dx + b_k \int_0^{2\pi} \sin kx \cos mx\,dx \right). \qquad (18)$$

Рассмотрим сначала случай $m = 0$, $\cos 0 \cdot x \equiv 1$. Тогда, пользуясь ортогональностью функций $\cos kx$ и 1, $\sin kx$ и 1 (см. (5)), получим из (18)

$$\int_0^{2\pi} P(x) \cdot 1\,dx = a_0 \int_0^{2\pi} 1\,dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \int_0^{2\pi} \cos kx \cdot 1\,dx + b_k \int_0^{2\pi} \sin kx \cdot 1\,dx \right) =$$

$$= a_0 \cdot 2\pi + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot 0 + b_k \cdot 0) = 2\pi a_0.$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x)\,dx. \qquad (19)$$

Аналогично из (18) при $m > 0$, пользуясь формулами ортогональности (5)–(7) и формулой (9), получим

$$\int_0^{2\pi} P(x)\cos mx\,dx = a_0 \cdot 0 + a_m \int_0^{2\pi} \cos^2 mx\,dx = a_m \pi.$$

Отсюда

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) \cos mx\,dx. \qquad (20)$$

Аналогично, умножив обе части (17) на $\sin mx$, $m = 1, 2, ..., n$, получим

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) \sin mx\,dx. \qquad (21)$$

Формулы (19), (20) и (21) показывают, что коэффициенты a_0, a_m, b_m, $m = 1, ..., n$, однозначно определяются функцией $P(x)$. Эти формулы называются формулами Фурье для коэффициентов a_m и b_m разложения функции $P(x)$ по $\cos kx$, $k = 0, 1, ..., n$, и $\sin kx$, $k = 1, ..., n$.

Пользуясь выражениями (10) и (16) для скалярного произведения $((f(x), g(x))$ и скалярного квадрата $(f(x), f(x))$, эти формулы можно еще записать следующим образом:

$$a_0 = \frac{(P(x), 1)}{(1, 1)}; \qquad (22)$$

$$a_m = \frac{(P(x), \cos mx)}{(\cos mx, \cos mx)}; \qquad (23)$$

$$b_m = \frac{(P(x), \sin mx)}{(\sin mx, \sin mx)}. \qquad (24)$$

В формулах (22)–(24)

$$(P(x), 1) = \int_0^{2\pi} P(x) \cdot 1\,dx,$$

$$(1, 1) = \int_0^{2\pi} 1 \cdot 1\,dx = 2\pi,$$

$$(P(x), \cos mx) = \int_0^{2\pi} P(x) \cos mx\,dx,$$

$$(\cos mx, \cos mx) = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos mx\,dx = \pi,$$

$$(P(x), \sin mx) = \int_0^{2\pi} P(x) \sin mx\,dx,$$

$$(\sin mx, \sin mx) = \int_0^{2\pi} \sin mx \sin mx\,dx = \pi.$$

Для скалярного квадрата $(P(x), P(x))$ функции $P(x)$ имеет место формула

$$(P(x), P(x)) = \int_0^{2\pi} P^2(x)\,dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2), \qquad (25)$$

называемая равенством Парсеваля. Действительно, подставив вместо $P(x)$ выражение справа в (17), получим

$$(P(x), P(x)) =$$

$$= \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),\right.$$

$$\left. a_0 + \sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx + b_m\sin mx)\right) =$$

$$= a_0^2(1, 1) + \sum_{m=1}^{n} a_0(a_m(1, \cos mx) + b_m(1, \sin mx)) +$$

$$+ \sum_{k, m=1}^{n}[a_k a_m(\cos kx, \cos mx) + a_k b_m(\cos kx, \sin mx) +$$

$$+ b_k a_m(\sin kx, \cos mx) + b_k b_m(\sin kx, \sin mx)] =$$

$$= a_0^2(1, 1) + \sum_{k=1}^{n}[a_k^2(\cos kx, \cos kx) + b_k^2(\sin kx, \sin kx)] =$$

$$= a_0^2 \cdot 2\pi + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2). \qquad (26)$$

При этом мы воспользовались формулами (5)–(7) ортогональности функций 1, $\cos kx$, $\sin kx$, $k = 1, ..., n$, и формулой (9).

Формула (25) выражает тот факт, что квадрат нормы $\|P(x)\|^2 = (P(x), P(x))$ равен сумме квадратов коэффициентов Фурье a_0, a_k и b_k функции $P(x)$ с множителями 2π и π соответственно. Эти множители, напомним, появились потому, что квадраты норм базисных функций имеют вид

$$(1, 1) = 2\pi, \quad (\cos kx, \cos kx) = \pi, \quad (\sin kx, \sin kx) = \pi.$$

Если на плоскости на осях Ox_1 и Ox_2 ввести единичные векторы $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ и вектор $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$, то

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2. \qquad (27)$$

Эта формула называется теоремой Пифагора.

Представим себе теперь функции 1, $\cos kx$, $\sin kx$, $k = 1, ..., n$, как векторы в $(2n + 1)$-мерном пространстве H_{2n+1}, натянутом на эти векторы. Точнее, H_{2n+1} состоит из всех линейных комбинаций

$$\left\{c_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n}(c_k\cos kx + d_k\sin kx)\right\} \equiv \{P(x)\} = H_{2n+1},$$

где c_0, c_k, d_k – произвольные действительные числа. Введем в H_{2n+1} скалярное произведение $(P(x), Q(x))$ по формуле (10), где $P(x)$ – полином (17), а

$$Q(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx).$$

Тогда функции $\{1, \cos kx, \sin kx | k = 1, ..., n\}$ образуют ортогональный базис в H_{2n+1} и скалярный квадрат $(P(x), P(x)) = \|P(x)\|^2$ выражается по формуле (25). Эта формула является многомерным аналогом теоремы Пифагора (напомним еще раз, что множители 2π и π появились из-за того, что квадраты норм базисных функций 1, $\cos kx$, $\sin kx$ не равны 1, а равны 2π и π соответственно).

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В РЯД ФУРЬЕ

Функция $f(x)$ называется периодической с периодом T, если

$$f(x + T) = f(x), \qquad -\infty < x < +\infty. \qquad (28)$$

Как и выше, достаточно рассмотреть случай $T = 2\pi$. Решая задачи о распространении тепла, Фурье пришел к выводу, что всякая периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π может быть представлена в виде суммы бесконечного ряда по $\cos kx$, $k = 0, 1, ...,$ и $\sin kx$, $k = 1, 2, ...$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx). \qquad (29)$$

Ряды, стоящие справа в (29), называются тригонометрическими рядами.

В теории тригонометрических рядов доказана следующая

Теорема. *Если 2π-периодическая функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $f'(x)$ для $-\infty < x < +\infty$, то она представима в виде сходящегося тригонометрического ряда* (29) *и выполнены сформулированные выше требования почленного интегрирования* [1].

Заметим, что эти факты имеют место также при значительно менее ограничительных условиях относительно функции $f(x)$, на которых мы здесь не останавливаемся.

Пусть функция $f(x)$ такова, что для каждого x, $-\infty < x < +\infty$, тригонометрический ряд (29) сходится к $f(x)$. Кроме того, предполагается, что, умножив, как и в разделе 2, обе части на $\cos kx$ или $\sin kx$, полученные равенства можно почленно интегрировать.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет сформулированным выше условиям, то ее коэффициенты a_k, $k = 0, 1, ...,$ и b_k, $k = 1, 2, ...,$ в разложении* (29) *однозначно определяются ею по формулам*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \qquad a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx dx,$$
$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx, \qquad m = 1, 2, ... \qquad (30)$$

Числа a_0, a_m, b_m, $m = 1, 2, ...,$ найденные по формулам (30), называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$.

Вывод формул (30) при сформулированных выше условиях сходимости ряда Фурье (29) проводится аналогично выводу формул (19)–(21). Так, например, умножив обе части (29) на $\cos mx$, $m \geq 1$, и проинтегрировав по x в пределах от 0 до 2π, получим

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx dx = a_0\int_0^{2\pi}\cos mx dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_0^{2\pi}\cos kx\cos mx dx + b_k\int_0^{2\pi}\sin kx\cos mx dx\right) =$$

$$= a_m\int_0^{2\pi}\cos^2 mx dx = a_m\pi.$$

Отсюда получаем формулу (30) для a_m. Аналогично выводятся формулы для b_m и a_0.

Аналогично (25) для функции $f(x)$, представимой в виде (29), имеет место равенство Парсеваля

$$(f(x), f(x)) = \int_0^{2\pi} f^2(x)dx = 2\pi a_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2). \quad (31)$$

Здесь a_k, b_k – коэффициенты Фурье функции $f(x)$, которые вычисляются по формулам (30). Вывод формулы (31) совпадает с выводом аналогичной формулы (26) для тригонометрического многочлена $P(x)$. Достаточно в (26) вместо $P(x)$ подставить $f(x)$ и суммирование справа производить от m, $k = 1$ до $+\infty$.

Формула (31) является бесконечномерным обобщением теоремы Пифагора (23). При этом базисными функциями служат тригонометрические функции $\cos kx$, $k = 0, 1, ...$, $\sin kx$, $k = 1, 2, ...$ Эти базисные функции ортогональны в том смысле, что скалярные произведения разных функций базиса равны нулю, то есть имеют место формулы (5)–(7). Коэффициенты a_0, a_k и b_k в (29) можно считать координатами функции $f(x)$ в ортогональном базисе $\{1, \cos kx, \sin kx | k = 1, 2, ...\}$. Они вычисляются по формулам (30). Равенство (31) означает, что квадрат нормы $\|f(x)\|^2$ функции $f(x)$ равен сумме квадратов ее координат a_k и b_k. Множители 2π и π в (31) связаны с тем, что квадраты норм базисных функций 1, $\cos kx$, $\sin kx$ равны соответственно 2π и π (см. (9)).

Приведем пример разложения функции $f(x)$ в ее ряд Фурье. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ для } 0 < x < \pi, \\ -1 \text{ для } \pi < x < 2\pi, \end{cases}$$

а вне этого интервала $f(x)$ равна периодическому продолжению этой функции с периодом 2π (рис. 1). В теории тригонометрических рядов доказывается, что ряд Фурье функции $f(x)$, изображенной на рис. 1, сходится к этой функции во всех точках x непрерывности $f(x)$.

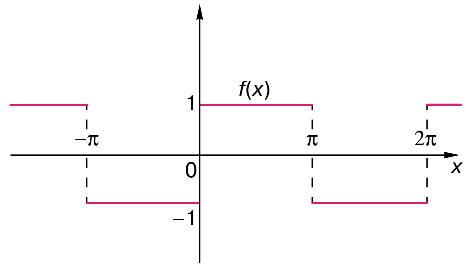

Рис. 1

Найдем коэффициенты Фурье a_k и b_k функции $f(x)$, изображенной на рис. 1. В силу периодичности с периодом 2π функций $f(x)\cos kx$ и $f(x)\sin kx$ имеем

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos kx dx + \int_0^{+\pi}(+1)\cos kx dx\right] = 0,$$

$$k = 0, 1, ...,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin kx dx + \int_0^{+\pi}(+1)\sin kx dx\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos kx}{k}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos k\pi}{k} + \frac{\cos k\cdot 0}{k}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k} - \frac{(-1)^k}{k}\right), \qquad k = 1, 2, ... \quad (32)$$

При $0 < x < \pi$

$$f(x) \equiv 1 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad (33)$$

где b_k определяется по формуле (32).

Из (32) следует, что при четном $k = 2n$ выполнено $b_{2n} = 0$, а при нечетном $k = 2n - 1$:

$$b_{2n-1} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{2n-1}. \quad (34)$$

Таким образом, согласно (33) и (34) имеем для $0 < x < \pi$:

$$1 \equiv \sum_{k=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.$$

Полагая в этой формуле $x = \pi/2$, получим

$$1 = \frac{4}{\pi}\left[1\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin 5\frac{\pi}{2} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \ldots\right].$$

Отсюда находим следующую формулу для $\pi/4$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \ldots$$

4. РЯДЫ ФУРЬЕ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Допустим, что $f(x)$ – нечетная периодическая функция с периодом 2π:

$$f(-x) = -f(x), \quad f(x) = f(x + 2\pi), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (35)$$

Тогда аналогично приведенному выше примеру все ее коэффициенты Фурье a_k при $\cos kx$ и при 1 равны нулю:

$$a_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (36)$$

Действительно, поскольку $f(x)\cos kx$ нечетная и 2π-периодическая функция, то

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx dx = 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx = 0.$$

При этом мы воспользовались тем, что интеграл от нечетной функции (см. (35)) по интервалу $(-\pi, +\pi)$ равен нулю.

Для коэффициентов Фурье b_k получаем

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin kx dx + \int_0^{+\pi} f(x)\sin kx dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\pi} f(x)\sin kx dx, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

воспользовавшись тем, что $f(x)\sin kx$ периодическая с периодом 2π и эта функция четная:

$$f(-x)\sin(-kx) = (-1)f(x)(-1)\sin(kx) = f(x)\sin(kx).$$

Таким образом, ряд Фурье нечетной, 2π-периодической функции $f(x)$ содержит лишь $\sin kx$, причем

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \qquad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx. \quad (37)$$

Аналогично доказывается, что четная и 2π-периодическая функция $f(x)$:

$$f(x) = f(-x), \quad f(x) = f(x + 2\pi), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (38)$$

разлагается в ряд Фурье по $\cos kx$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad b_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad (39)$$

причем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx. \qquad (40)$$

В приложениях тригонометрические ряды используются для представления функции $f(x)$, заданной лишь на конечном интервале $(0, \pi)$ в виде, например, ее ряда Фурье по $\sin kx$ по формуле (37). Это возможно сделать потому, что такую функцию можно сначала продолжить нечетным образом на интервал $(-\pi, +\pi)$, а затем полученную функцию периодически с периодом 2π продолжить на всю ось. Таким образом мы получим периодическую функцию $\tilde{f}(x)$ с периодом 2π и притом нечетную. Поэтому $\tilde{f}(x)$ представима в виде (37). Так как $f(x) = \tilde{f}(x)$ при $0 < x < \pi$, то исходная функция $f(x)$ представима в виде (37) для $0 < x < \pi$.

Аналогично функцию $f(x)$, заданную лишь для $0 < x < \pi$, можно разложить по $\cos kx$ по формулам (39), (40).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. М.: Гостехиздат, 1956.

* * *

Марко Иосифович Вишик, доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, главный научный сотрудник Института проблем передачи информации РАН. Автор 232 научных работ и четырех монографий.