SURFACE WAVES AND RESONANCE PHENOMENA IN ELASTIC BODIES

R. V. GOL'DSTEIN

***Resonance phenomena in homogeneous isotropic elastic bodies associated with the motion of a source of an action along the surface (loads, punches) or in the bulk (cracks) with the velocities close to the surface wave ones were considered. A qualitative model of the resonance phenomena was given and their role in practice was discussed.***

***Рассмотрены резонансные явления в однородных изотропных упругих телах, возникающие при движении источника возмущений по поверхности (нагрузок, штампов) или внутри тела (трещин) со скоростями, близкими к скоростям поверхностных волн. Описана качественная модель указанных резонансных явлений и обсуждается их прикладное значение.***



# ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ И РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

Р. В. ГОЛЬДШТЕЙН

*Российский государственный авиационный технологический университет им. К.Э. Циолковского, Москва*

## ВВЕДЕНИЕ

В повседневной жизни мы постоянно встречаемся с различными проявлениями волновых явлений, подчас не осознавая этого. Пролетает самолет, и вдруг вы слышите резкий хлопок. Вы бросаете камушек в весенний ручеек и видите, как тут же образуются отходящие от него линии (поверхности), которые препятствуют плавному течению воды. При всем внешнем различии этих примеров в их основе лежит один и тот же механический эффект. Хлопок сопровождает преодоление самолетом звукового барьера: скорость самолета становится больше скорости распространения звука в воздухе, равной ~330 м/с. В ручейке (на мелкой воде) скорость звука существенно меньше ~1 м/с. Линии, возникшие возле камушка, отражают тот факт, что течение вблизи него происходит со сверхзвуковой скоростью. Поэтому сами эти линии называют *звуковыми линиями*. Аналогичные *звуковые поверхности* (ударные волны) возникают и в воздухе вблизи носовой оконечности самолета, только для их визуализации нужна специальная аппаратура.

Звуковые волны, о которых шла речь, представляют собой объемные волны, распространяющиеся в однородной изотропной среде по всем направлениям с одинаковой скоростью. Интенсивность их затухания по мере удаления от источника также не зависит от направления.

Наряду с объемными волнами в сплошных средах при наличии протяженных границ могут существовать волны, локализованные вблизи границ как волноводов. Таковы, в частности, поверхностные волны в жидкости и упругой среде, открытые известным английским физиком Рэлеем (Rayleigh) в 90-х годах прошлого века. В идеальном случае волны Рэлея представляют собой волны, распространяющиеся вдоль границы полупространства, экспоненциально затухая в поперечном направлении. В результате поверхностные волны локализуют энергию возмущений, созданных на поверхности, в сравнительно узком приповерхностном слое. Именно это свойство поверхностных волн приводит к резонансным явлениям, сопровождающим движение вдоль поверхности источников возмущений со скоростями, близкими к скорости поверхностных волн.

Мы рассмотрим эти резонансные явления применительно к упругим телам.

Упругая среда интересна еще и тем, что резонансные эффекты в ней проявляются и тогда, когда изначально там не было свободных поверхностей, а затем они появились, например в результате возникновения и развития трещин.

## ВОЛНЫ РЭЛЕЯ. РЕЗОНАНСЫ В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

### Поверхностные волны Рэлея

Рассмотрим однородную изотропную упругую среду. Прежде всего напомним, что в такой среде существуют два типа объемных волн: продольные волны, в которых смещение частиц происходит в направлении распространения волны, и поперечные, в которых частицы претерпевают смещение в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны. Продольные и поперечные волны представляют собой решения дифференциальных уравнений движения (деформирования) неограниченной упругой среды при отсутствии каких бы то ни было источников возмущений упругой среды. Можно сказать, что продольные и поперечные волны – это объемные собственные колебания. Обозначим символами $c_1$, $c_2$ скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно. Можно показать, что скорости $c_1$, $c_2$ следующим образом выражаются через упругие постоянные материала $E$ – модуль Юнга, $\nu$ – коэффициент Пуассона и его плотность $\rho$:

$$c_1 = \left[\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}\right]^{1/2}, \qquad c_2 = \left[\frac{E}{2\rho(1+\nu)}\right]^{1/2}. \quad (1)$$

Из формулы (1), в частности, видно, что

$$\frac{c_1}{c_2} = \left[\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right]^{1/2}.$$

Отсюда следует неравенство

$$c_1 > \sqrt{2}c_2,$$

поскольку коэффициент Пуассона $\nu$ для различных упругих материалов заключен в пределах от 0 до 1/2.

Теперь рассмотрим упругую среду, имеющую одну границу – плоскость $y = 0$ и занимающую полупространство $y \le 0$. Предположим, что поверхность полупространства свободна от нагрузок и отсутствуют источники возмущений внутри его и на бесконечности. Пользуясь принятыми в теории упругости обозначениями, граничные условия на поверхности полупространства можно записать в виде

$$\sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0, \quad y = 0, \qquad (2)$$

где $\sigma_{yy}$, $\sigma_{xy}$, $\sigma_{zy}$ – компоненты нормальных и касательных напряжений на граничной площадке с нормалью, направленной вдоль оси $y$.

Оказывается, что уравнения движения упругого тела при однородных граничных условиях (2) имеют решение, которое не зависит от одной из координат, $z$, и представляет собой волну, распространяющуюся в направлении оси $x$ и экспоненциально затухающую в глубь полупространства (в направлении оси $y$). Вектор смещений точек полупространства $u = (u_x, u_y)$ в этой волне имеет вид

$$u = u_0 e^{-ay + ib(x-ct)}, \qquad i = \sqrt{-1}. \qquad (3)$$

Скорость волны удовлетворяет уравнению

$$R(c) = 0, \qquad (4)$$

где

$$R(c) \equiv (2 - m_1^2)^2 - 4\sqrt{1-m_1^2}\sqrt{1-m_2^2} \qquad (5)$$

и $m_1 = c/c_1$, $m_2 = c/c_2$. Функция $R(c)$ называется функцией Рэлея, а сама волна (3) – поверхностной волной Рэлея.

Анализ трансцендентного уравнения (4) показывает, что оно имеет корень $c_R$ при любых комбинациях упругих постоянных. Этот корень можно записать в форме $c_R = \alpha c_2$, где $\alpha$ всегда меньше 1 (точнее, $\alpha$ заключено в пределах от 0,86 до 0,96). Волны Рэлея – это собственные колебания упругого полупространства, поскольку они представляют собой однородные решения уравнений движения (то есть ненулевые решения при нулевых граничных условиях).

### Движение нагрузки по границе полупространства

В предыдущем разделе граница упругого полупространства считалась свободной от нагрузок (см. граничные условия (2)). Предположим теперь, что по поверхности полупространства перемещается нагрузка. Мы рассмотрим два варианта движения нагрузки.

1. В момент времени $t = 0$ к участку $x \le 0$ границы $y = 0$ прикладывается нормальная сжимающая, равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q$, которая начинает перемещаться с постоянной скоростью $V$ в положительном направлении оси $x$. Граничные условия имеют вид

$$\sigma_{yy} = -qH(Vt - x), \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (6)$$

Здесь $H(u)$ – функция Хевисайда, описывающая скачок какой-либо величины и равная единице при $u \ge 0$ и нулю при $u < 0$. Таким образом, речь идет о нестационарной задаче о равномерном движении нагрузки по невозмущенному полупространству (то есть начальные условия нулевые).

2. В качестве второго варианта движения нагрузки рассмотрим предельный случай первого. Пусть с момента приложения нагрузки (6) и начала ее движения прошло много времени. Кажется очевидным, что по мере увеличения промежутка времени с момента приложения нагрузки влияние начальной стадии процесса ее движения постепенно будет исчезать. В пределе при $t \longrightarrow \infty$ для наблюдателя,

движущегося с передним фронтом нагрузки со скоростью $V$, картина будет оставаться неизменной. Этот предельный случай отвечает так называемой стационарной задаче о движении нагрузки. Если ввести подвижную систему координат

$$x = x' + Vt, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

связанную с передним краем движущейся нагрузки, то граничные условия стационарной задачи примут вид

$$\sigma_{yy} = -qH(-x'), \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (7)$$

Заметим, что в стационарной задаче в уравнениях движения производные по времени заменяются производными по координате

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -V\frac{\partial}{\partial x'}.$$

Мы не имеем возможности здесь строить решения сформулированных динамических задач теории упругости. Для наших целей достаточно привести решения и выполнить их анализ. Начнем со стационарной задачи, поскольку ее решение сразу демонстрирует особую роль рэлеевской скорости $c_R$.

Оказывается, что компоненты напряжений в любой точке полупространства в стационарной задаче могут быть представлены в виде

$$\sigma_{ij} \sim \frac{q}{R(V)} f_{ij}\left(\frac{x'}{k_1 y'}, \quad \frac{x'}{k_2 y'}\right), \quad (8)$$

где $k_{1,2}^2 = 1 - (V^2/c_{1,2}^2)$, индексы $i, j$ могут быть равны $x$, $y$, $z$ независимо, а $R(V)$ – введенная ранее функция Рэлея (5).

Если скорость стационарного движения нагрузки совпадает с рэлеевской $V = c_R$, то функция $R(V)$ обращается в нуль: $R(c_R) = 0$. Формулы (8) показывают, что в этом случае напряжения в любой точке полупространства становятся бесконечными. Можно показать, что то же самое имеет место и для смещений точек полупространства. Таким образом, при движении нагрузки с рэлеевской скоростью стационарное распределение напряжений и смещений в среде невозможно.

Далее, стационарное решение имеет еще одно необычное свойство вблизи рэлеевской скорости. Дело в том, что функция $R(V)$ меняет знак при переходе через рэлеевскую скорость, то есть $\operatorname{sign} R(c_R - 0) = -\operatorname{sign} R(c_R + 0)$. Следовательно, при переходе через рэлеевскую скорость в стационарном решении меняются во всех точках полупространства знаки напряжений и смещений. В частности, это означает, что если при дорэлеевской скорости $V < c_R$ поверхность полупространства прогибалась при $x' < 0$ под действием приложенной нагрузки, то на сверхрэлеевских скоростях $c_R < V < c_2$ (заметим, что, рассматривая движение со сверхрэлеевской скоростью, мы будем считать, что скорость $V$ меньше скорости поперечных волн $c_2$) картина обратная и поверхность выпучивается под нагрузкой.

Для того чтобы разобраться в том, что означают несуществование решения стационарной задачи при $V = c_R$ и смена знака напряжений и смещений в стационарном решении при переходе через рэлеевскую скорость, рассмотрим процесс установления стационарного решения в нестационарной задаче, отвечающей распределению нагрузки (6), приложенной в момент времени $t = 0$.

Как формируется стационарное решение, можно понять, если в решении нестационарной задачи проследить за изменением распределения напряжений в произвольной фиксированной области, перемещающейся вместе с передним краем нагрузки. Для этого нужно перейти в подвижную систему координат, использованную выше, $x'$, $y'$, $z'$ ($x = x' + Vt$, $y' = y$, $z' = z$) и затем рассмотреть поведение напряжений в произвольной точке, неподвижной относительно переднего края нагрузки (то есть при фиксированных $x'$, $y'$, $z'$) при больших временах $t$.

Анализ показывает, что когда скорость движения нагрузки не равна рэлеевской $V \neq c_R$, то напряжения в нестационарном решении в окрестности переднего края нагрузки стремятся с течением времени к конечному пределу, совпадающему со стационарным решением (см. (8)).

Если же нагрузка движется с рэлеевской скоростью $V = c_R$, то асимптотика напряжений при больших временах имеет вид

$$\sigma_{ij} \sim q\varphi_{ij}(x', y', c_R, c_1, c_2)t + O(1), \quad (9)$$

где, как обычно, $O(1)$ означает конечную часть предельной функции. Из формулы (9) видно, что напряжения в любой фиксированной окрестности переднего края нагрузки, движущейся с рэлеевской скоростью, нарастают асимптотически пропорционально времени. Следовательно, движение в окрестности края нагрузки никогда не станет установившимся, что и отражает факт несуществования стационарного решения при рэлеевской скорости перемещения нагрузки.

Нарастание напряжений при движении нагрузки с рэлеевской скоростью объясняется тем, что в этом случае поверхностные волны, возникающие у переднего края нагрузки в различные моменты времени и распространяющиеся в направлении ее движения, имеют общий фронт, который перемещается вместе с передним краем нагрузки. Таким образом, в окрестности переднего края нагрузки происходит наложение поверхностных волн в одинаковой фазе. Энергия, переносимая поверхностными волнами, запасается в окрестности края нагрузки, что и приводит к росту напряжений.

Ситуация здесь аналогична резонансу в обычной колебательной системе с одной степенью свободы. Нарастание амплитуды напряжений пропорционально времени связано с совпадением скорости движения источника возмущений со скоростью распространения собственных волн упругого полупространства, каковыми, как отмечалось выше, и являются поверхностные волны Рэлея.

Заметим, что изменение знака смещений при переходе через резонансную рэлеевскую скорость в стационарном решении также аналогично поведению колебательной системы с одной степенью свободы, где наблюдается сдвиг фазы колебаний на 180° по отношению к фазе возмущающей силы при переходе через резонансную частоту. Асимптотический анализ смещений в решении нестационарной задачи при больших временах позволяет объяснить парадоксальное на первый взгляд выпучивание границы полупространства под сжимающей нагрузкой, движущейся со сверхрэлеевской скоростью. Качественно дело здесь в следующем. При сверхрэлеевской скорости движения нагрузки ее передний край догоняет вызванное им же в предыдущий момент поднятие поверхности впереди нагрузки.

Заметим, что резонансные явления описанного типа имеют место и при иных видах источников, движущихся со скоростями, близкими к рэлеевской. В частности, сходная картина отвечает движению по границе полупространства жесткого (недеформируемого) штампа. Отличие задачи о штампе от задачи о движущейся нагрузке в том, что в случае штампа на поверхности полупространства задаются смещения под штампом, а вне штампа поверхность считается свободной от нагрузок. Отыскиваются же в результате решения задачи поля напряжений и смещений внутри полупространства, а также распределение контактных давлений под штампом и смещения поверхности вне его. Структура решения стационарной задачи о штампе такая же, как и задачи о нагрузке. Наличие в формулах для компонент напряжений и смещений множителя $1/R(V)$ приводит к тому, что при $V = c_R$ стационарное решение задачи о штампе перестает существовать.

## Распространение трещины в упругой среде

Скорость поверхностных волн Рэлея оказывается критической и в тех ситуациях, когда свободная поверхность возникает в упругом теле в процессе его динамического разрушения.

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу о распространении трещины. Пусть в упругой плоскости (пластине) $xOy$ под действием приложенных симметрично относительно оси $x$ растягивающих нагрузок вдоль некоторого участка оси $x$ возникает разрыв смещений в направлении оси $y$. В таком случае говорят о возникновении трещины нормального разрыва. Предположим далее, что трещина начинает динамически расти с постоянной скоростью $V < c_2$. Если начальную длину трещины обозначить $2l_0$, то в момент времени $t$ ее длина станет равной $2l(t) = 2l_0 + 2Vt$. Как и в случае движения нагрузки, здесь также можно рассмотреть стационарную задачу, если перейти в систему координат, движущуюся вместе с одним из концов трещины, и следить за полем напряжений и смещений, которое установится в фиксированной относительно этого конца области плоскости с течением времени (в пределе при $t \longrightarrow \infty$). Заметим, что при таком предельном переходе мы получим плоскость с трещиной по полуоси $x$ (полубесконечной трещиной), конец которой перемещается с постоянной скоростью.

Естественно считать, как это и делается в теории трещин хрупкого разрушения, что для образования единицы площади новой поверхности трещины необходима определенная энергия (называемая поверхностной). Эта энергия поступает в конец трещины, точнее, в малую его окрестность на продолжении трещины за счет изменения при продвижении трещины запасенной в упругой среде при деформации потенциальной энергии.

Если решить стационарную задачу о движении трещины и по этому решению подсчитать изменение $G$ потенциальной энергии плоскости при изменении площади трещины на единицу, то окажется, что величина $G$ зависит от скорости трещины и может быть представлена в форме

$$G(V) \sim \frac{1}{R(V)} f(V, c_R, c_1, c_2, P, E, \nu), \qquad (10)$$

здесь через $P$ обозначена интенсивность растягивающих нагрузок.

Анализ показывает, что при стремлении скорости роста трещины к рэлеевской $V \longrightarrow c_R$ функция $f$ конечна. Следовательно, поток энергии $G$ в конец трещины неограниченно возрастает, так как $R(V) \longrightarrow 0$ при $V \longrightarrow c_R$. Далее при переходе через рэлеевскую скорость знак функции Рэлея $R(V)$ меняется при неизменном знаке функции $f$. В результате поток энергии в конец трещины также меняет знак и становится отрицательным. Иначе говоря, вместо притока энергии в конец трещины при дорэлеевских скоростях ее распространения на сверхрэлеевских скоростях энергия должна была бы излучаться из конца трещины. Если учесть, что поверхностная энергия материала положительна, то отсюда можно сделать вывод о невозможности распространения трещины со скоростями, большими рэлеевской скорости. Подчеркнем, что рэлеевская скорость оказывается теоретически предельной скоростью роста трещины в рамках принятой нами модели хрупкого разрушения упругого тела. К такому выводу из различных соображений пришли в 50–60-х годах E. Yoffe, Г.И. Баренблатт, Г.П. Черепанов и J.W. Craggs. Реально в экспериментах предельная скорость свободного развития трещины меньше и составляет примерно 0,3–0,4 рэлеевской. При больших скоростях трещина начинает ветвиться. Мы не имеем возможности здесь обсуждать эти эффекты.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы иллюстрировали в начале статьи волновые эффекты примерами перехода через скорость звука источника возмущений, движущегося относительно газа или жидкости. С математической точки зрения эти эффекты связаны с тем, что при переходе через скорость звука меняется тип дифференциальных уравнений, описывающих течение. Резонансные явления, сопровождающие переход через скорость рэлеевских волн, имеют иную природу. Они не связаны с изменением типа уравнений движения упругой среды, а обусловлены граничными условиями: наличием свободной поверхности и появлением в связи с этим нового типа собственных волн в среде – поверхностных волн.

Постановка задач о движении источников возмущений со сверхрэлеевской скоростью имеет свою специфику. Эффекты, которые проявляются, когда скорость источника возмущения заключена в диапазоне от скорости волн Рэлея до скорости поперечных волн, обсуждаются, например, в работах [1, 2]. Качественные особенности, связанные с изменением типа уравнений движения упругой среды, когда скорость источника возмущений становится больше скорости поперечных волн, исследованы, в частности, в работах [3, 4]. Эти эффекты могут служить предметом отдельной статьи.

При изложении материала мы в основном опирались на работы [5–8, 2]. Подробно исследование режимов перехода через рэлеевскую скорость неравномерно движущейся нагрузкой и сопутствующих резонансных эффектов описано в работе [8]. В зависимости от типа упругой системы закон нарастания напряжений со временем при переходе через соответствующие критические скорости меняется. Например, в полуплоскости скорость нарастания напряжений существенно выше, чем в балке, лежащей на упругом основании [8, 9]. Заметим, что изучение резонансных режимов имеет практическое значение при динамических расчетах на воздействие подвижных нагрузок таких объектов, как железнодорожные пути, туннели, мосты. Понимание природы резонансных эффектов важно и при разработке разнообразных гасителей колебаний. В этой связи отметим, что при движении нагрузок в сплошной среде наряду с резонансом может наступать и антирезонанс [6], когда генерируемые нагрузкой волны, взаимодействуя между собой, создают волну, компенсирующую действие нагрузки. В частности, в [6] такие режимы антирезонанса описаны для случая движения нагрузки по поверхности идеальной сжимаемой жидкости. Оказывается, что во многих случаях может происходить локализация колебаний в некоторой области около сосредоточенной массы, присоединенной к длинному волноводу (например, балке или пластине, лежащих на упругом основании). Поучительным примером такого рода служит локализация колебаний струны в сопротивляющейся среде при наличии на струне неоднородности в виде сосредоточенной массы [10].

Наконец отметим, что резонансные явления описанного вида имеют место и в кусочно-однородных упругих, например склеенных, телах. В частности, это относится к случаям роста трещин по границе соединения двух упругих материалов с различными упругими свойствами, когда есть несколько критических скоростей, совпадающих со скоростями поверхностных волн, которые могут распространяться вдоль границ соединения материалов при различных условиях их контакта [11].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Barenblatt G.I., Goldstein R.V.* Wedging of an Elastic Body by a Wedge with a Constant Super-Rayleigh Subsonic Velocity // Intern. J. Fract. Mech. 1972. V. 8. № 4. P. 427–434.
2. *Georgiadis H.G., Barber J.R.* On the Super-Rayleigh/Subseismic Elastodynamic Indentation Problem // J. Elast. 1993. V. 31. № 3. P. 141–161.
3. *Симонов И.В.* О поведении решений динамических задач в окрестности края разреза, движущегося с трансзвуковой скоростью в упругой среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1983. № 2. С. 109–116.
4. *Симонов И.В.* Трансзвуковое обтекание тонкого твердого тела упругой средой // Прикл. математика и механика. 1984. Т. 48. В. 1. С. 114–122.
5. *Гольдштейн Р.В.* Волны Рэлея и резонансные явления в упругих телах // Там же. 1965. Т. 29. № 3. С. 516–525.
6. *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.
7. *Слепян Л.И.* Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 296 с.
8. *Каплунов Ю.Д.* Нестационарная динамика упругой полуплоскости при действии подвижной нагрузки. М., 1986. 54 с. Препр. / Ин-т проблем механики АН СССР; № 277.
9. *Каплунов Ю.Д., Муравский Г.Б.* Действие равнопеременно движущейся силы на балку Тимошенко, лежащую на упругом основании. Переходы через критические скорости // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51. В. 3. С. 475–482.
10. *Kaplunov Yu.D., Sorokin S.V.* A Simple Example of a Trapped Mode in an Unbounded Waveguide // J. Acoust. Soc. Amer. 1995. V. 97. № 6.
11. *Гольдштейн Р.В.* О поверхностных волнах в соединенных упругих материалах и их связи с распространением трещин по линии соединения // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 31. В. 3. С. 468–475.


* * *


Роберт Вениаминович Гольдштейн, доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики и теоретической механики Российского государственного авиационного технологического университета им. К.Э. Циолковского, зав. лабораторией механики прочности и разрушения материалов и конструкций Института проблем механики РАН. Область научных интересов: механика, прикладная математика. Почетный член Международного конгресса по разрушению, член Международного общества по взаимодействию математики и механики и Германского общества по прикладной математике и механике, член редколлегий двух международных журналов по механике разрушения. Автор более 180 статей и монографии, переведенной на английский язык и изданной в Англии.