

ELECTROELASTICITY: SOME PROBLEMS IN MATHEMATICAL SIMULATION

Yu. A. USTINOV

This is the second part of my previous article [1] which was largely concerned with methodological issues. We show, using some typical examples of devices based on piezoelectric effects, the need for their mathematical simulation. We address some general problems of choosing a mathematical model depending on parameters of the problem. Some of my results, as well as those of my students, are presented.

Статья является продолжением статьи [1], которая в основном посвящена методологическим вопросам. На конкретных примерах устройств, использующих пьезоэффект, раскрывается потребность в их математическом моделировании; кратко рассматриваются общие вопросы выбора математической модели в зависимости от параметров задачи и излагаются некоторые результаты автора и его учеников.

ЭЛЕКТРОУПРУГОСТЬ. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ю. А. УСТИНОВ

Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья является продолжением статьи [1], которая была посвящена в основном методологическим вопросам. В ней излагалась краткая история возникновения и развития теории пьезоэлектричества (электроупругости), были приведены основные понятия и соотношения, на которых основывается математическое моделирование различных устройств и приборов, использующих в своей конструкции пьезоэлементы.

Круг технических применений электроупругости в настоящее время настолько широк, что даже специалисту не всегда под силу представить весь спектр изделий, основанных на использовании пьезоэффекта. Так, например, если обратиться к третьему тому трудов международной конференции "Пьезотехника-95" [2], в нем можно найти несколько десятков наименований. Приведу только те названия, которые указывают на их функциональные назначения. За каждым из них может скрываться ряд конкретных модификаций: Пьезоэлектрические двигатели. Пьезогенераторы и пьезотрансформаторы. Зеркала с электрически управляемой геометрией светотражающей поверхности и ее фокусным расстоянием. Датчики ускорения, давления, массы жидкости, вязкости, магнитного поля, уровня жидкости, скорости течения жидких сред, уровня вибрации и др. Преобразователи для медицинской диагностики и медицинского инструмента. Ультразвуковые излучатели и антенны. Линии задержки, фильтры, резонаторы в пьезоэлектронике. Инструменты для реставраторов.

Создание каждого конкретного устройства опирается на физический эксперимент (от определения физико-механических свойств материала, из которого изготавливается пьезоэлемент, до исследования качеств преобразователя в целом), конструкторский опыт и расчеты на основе выбранной математической модели. Правильно выбранная модель позволяет, в частности, сузить область экспериментальных исследований и оптимизировать конструкцию по ее параметрам.

Поэтому одно из направлений в математическом моделировании в области электроупругости связано с развитием методов расчета пьезопреобразователей.

При этом, как правило, возникает ряд сопутствующих проблем теоретического и прикладного характера.

Это направление является достаточно традиционным. Оно опирается на методы математической физики, теорию дифференциальных уравнений и другие разделы математики. Начиная с 60-х годов в этом направлении стали широко использовать специфические методы математической теории упругости.

Кроме того, можно выделить еще одно направление. Оно связано с тем, что в последние годы ведутся интенсивные работы (в том числе в ряде лабораторий Ростовского университета) по созданию новых композиционных материалов, обладающих пьезоэлектрическими, пьезопироэлектрическими, пьезоэлектромагнитными и другими свойствами. Их объединяют под общим названием “гибридные композиты”. Они существенно расширяют область технических применений, а возможность варьирования их свойств предоставляет дополнительные возможности для оптимизации параметров конструкции. Примером применения таких материалов может служить тот факт, что телефонная промышленность постепенно переходит от угольного порошка, используемого в звукоизлучающих и звукопринимающих элементах, на использование пьезокомпозиционных материалов. Однако создание пьезокомпозиционных материалов с заданными свойствами – это серьезная научная проблема. Применение математических методов для прогнозирования их свойств существенно облегчает общую задачу.

1. ДЛЯ ЧЕГО НУЖНО МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ? ПРИМЕРЫ.

Чтобы ответить на этот вопрос, приведу примеры конкретных преобразователей, расчетом которых пришлось заниматься мне и моим ученикам.

Пример 1. Сигнальное устройство. Сигнальное устройство должно обеспечивать звуковое давление 105 дБ на расстоянии 1 метр на частоте 3 кГц.

Основной рабочий элемент устройства – биморф. Биморф (рис. 1) – это тонкий металлический круглый диск диаметра D , к которому приклеен пьезоэлемент тоже в виде круглого диска меньшего диаметра d из пьезокерамики, лицевые поверхности которого покрыты электродами. При подаче разности потенциалов на электроды линейные размеры пьезоэлемента изменяются, а поскольку пьезоэлемент склеен с металлическим диском, то в результате биморф в целом изгибается. Если электрическое поле переменное, то в биморфе возникают изгибные колебания, которые возбуждают акустические волны в воздухе. Корпус устройства выполняет роль резонатора Гельмгольца.

Задача состояла, во-первых, в подборе параметров пьезоэлемента, то есть диаметра d и толщины h , так чтобы его резонансная частота была равна 3 кГц,

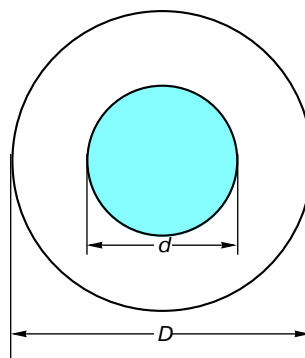


Рис. 1.

и, во-вторых, в выборе размеров корпуса и способа размещения в нем биморфа таким образом, чтобы резонансная частота воздуха, находящегося в нем, была близка к 3 кГц. Такая задача, вообще говоря, не имеет единственного решения. Однако при дополнительных условиях оптимизационного характера, о которых мы здесь не будем говорить, задачу удалось решить в основном математическими средствами и создать устройство, которое является оптимальным в сравнении с аналогичными.

Пример 2. Пьезотрансформатор. В нашем случае это была прямоугольная пластина из пьезокерамики, поляризованной по толщине (рис. 2). Общая задача включала в себя две конкретные. Первая из них состояла в разработке метода и создании программного обеспечения для расчета резонансных частот и форм колебаний пластины. Именно на резонансных частотах можно добиться максимального эффекта преобразования одного вида энергии в другой. Однако для каждой частоты получается достаточно сложное распределение механических напряжений и напряженности электрического поля. В тонкой пластине вектор напряженности электрического поля перпендикулярен срединной поверхности пластины, а знак его определяется знаком суммы главных напряжений:

$$2\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22}.$$

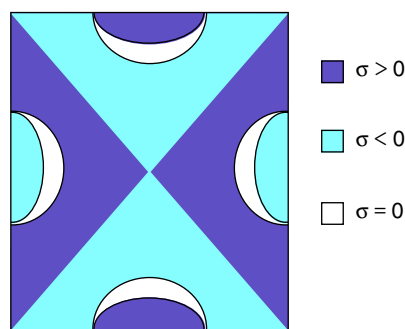


Рис. 2.

Поэтому вторая задача состояла в определении распределения по поверхности пластины, то есть выявление областей, где $\sigma > 0$, $\sigma < 0$ и $\sigma = 0$. Область $\sigma = 0$ с точки зрения возможности преобразования является пассивной. Максимального эффекта преобразования можно добиться, если на электроды, покрывающие лицевые поверхности пластины, нанести тонкие разрезы, так чтобы они разделяли области, где σ имеет противоположные знаки, и затем подключить в противофазе. Можно такую пластину использовать также в качестве источника питания, если возбудить в ней колебания механическим способом на резонансной частоте.

Пример 3. Вибродатчик. Это сложная конструкция (рис. 3). Она состоит из цилиндрического корпуса, внутри которого находится наборный цилиндр с чередующимися пьезоактивными и пассивными элементами, прижимаемыми друг к другу соединительным болтом. Этот датчик крепится к некоторой поверхности для измерения амплитуды ее колебаний.

Со стороны заказчика была поставлена задача: разработать метод расчета и программное обеспечение к нему для исследования прочности, резонансных частот и форм колебаний датчика. Программа должна была допускать вариацию параметров системы с целью достижения необходимой чувствительности. Замечу, что эта задача весьма сложная. Решение ее, обеспечивающее необходимую точность, с помощью классических аналитических методов оказалось невозможным. Поэтому задача решалась на основе современного численного метода – метода конечного элемента (МКЭ). Замечу, что область применения этого метода все время растет в силу его универсальности. Однако его применение требует достаточно мощных ЭВМ либо большого искусства от разработчиков программ, чтобы им воспользоваться на персональных компьютерах. Нам пришлось идти по второму пути. Непосредственными исполнителями этой работы были мои ученики И.П. Гетман, А.С. Беликов, Н.В. Курбатова.

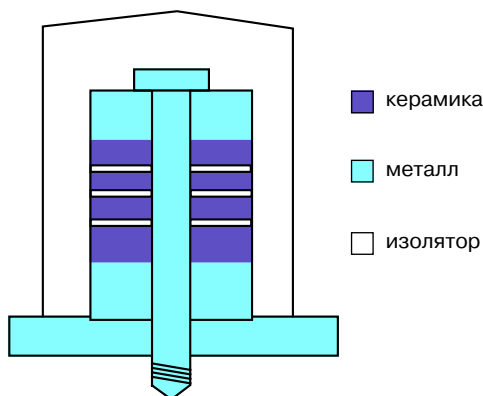


Рис. 3.

Приведенные примеры приоткрывают только небольшой круг проблем, связанных с математическим моделированием.

2. ВЫБОР И ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Как было сказано выше, одна из основных задач математического моделирования в электроупругости состоит в разработке методов расчета преобразователей различного назначения. Несмотря на прикладной характер, решение ее зачастую упирается в необходимость проведения исследований теоретического характера, в частности, в проблему выбора конкретной модели, способной адекватно описать свойства конструкции.

Современное математическое моделирование включает в себя математическую постановку задачи, разработку методов ее решения, создание программного обеспечения. Проблеме в целом, начиная с первых трудов Фойгта, посвящены сотни научных статей и десятки монографий.

Большинство устройств, использующих пьезоэффект, работают на таком уровне механических напряжений и напряженности электрического поля, что для их расчета можно использовать уравнения линейной электроупругости. В первой статье были введены основные понятия и приведена основная система уравнений электроупругости [1].

Напомним, что полная система уравнений включает в себя уравнения движения сплошной среды, уравнения электростатики, соотношения Коши для тензора деформаций и соотношения Фойгта. Для дальнейшего изложения приведу здесь только соотношения Фойгта для поляризованной керамики:

$$\begin{aligned} e_{11} &= S_{11}\sigma_{11} + S_{12}\sigma_{22} + S_{13}\sigma_{33} + d_{31}E_3, \\ e_{22} &= S_{12}\sigma_{12} + S_{11}\sigma_{22} + S_{13}\sigma_{33} + d_{31}E_3, \\ e_{33} &= S_{13}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + S_{33}\sigma_{33} + d_{33}E_3, \\ e_{12} &= S_{66}\sigma_{12}, \\ e_{13} &= S_{44}\sigma_{13} + d_{15}E_1, \\ e_{23} &= S_{44}\sigma_{23} + d_{15}E_2, \\ D_1 &= d_{15}\sigma_{13} + \varepsilon_{11}E_1, \\ D_2 &= d_{15}\sigma_{23} + \varepsilon_{11}E_2, \\ D_3 &= d_{33}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \varepsilon_{33}E_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь S , ε , d – константы материала, которые характеризуют его упругие, диэлектрические и электро-механические свойства соответственно. Они определяются из эксперимента. Независимых среди них девять.

Замечу, что в рамках соотношений Фойгта можно учесть также рассеивание энергии, связанное с физическими свойствами пьезоматериала. При этом константы σ , ε , d становятся комплексными.

Многие устройства состоят из упругих и пьезоактивных элементов. Если говорить о принципиальной стороне проблемы, то расчет их характеристик можно осуществить, основываясь на решении системы дифференциальных уравнений электроупругости, теории упругости, теории электрических цепей, дополнив их начальными и граничными условиями, а также условиями согласования между отдельными элементами и внешней средой. При таком подходе приходится опираться на прямые численные методы типа МКЭ. Реализация такого подхода требует мощных ЭВМ и соответствующего программного обеспечения, включающего в себя сервисные программы, базы данных, программы расчета и др. Естественно, все это под силу достаточно большому коллективу специалистов в области физики, механики и программирования. Соответственно требуются и большие финансовые затраты. Для решения задач теории упругости и пластичности некоторыми западными фирмами созданы пакеты прикладных программ. При этом работы велись начиная с 70-х годов. Стоимость таких пакетов различная. Так, например, лицензия на право использования университетского варианта пакета программ (для обучения студентов) стоит примерно 1,5 – 2 тысячи долларов, вариант для инженерных расчетов и серьезных научных исследований стоит порядка 20 тысяч долларов. Для сравнения подчеркну, что стоимость персонального компьютера РС-486, для которых разработаны университетские пакеты программ, колеблется в пределах 900 – 1500 долларов.

В настоящее время, насколько мне известно, в Германии и США ведутся работы по созданию программного обеспечения для решения задач электроупругости на основе МКЭ. Однако решение многих практически важных задач можно получить значительно более простыми и дешевыми средствами, упрощая исходную трехмерную задачу, опираясь при этом на некоторые физические соображения. Именно по такому пути, начиная с первой фундаментальной монографии У. Мэзони [3], шло развитие методов расчета.

Поясню сказанное на простом примере. Допустим, что нам необходимо исследовать колебания призмы из пьезокерамики, поляризованной вдоль ее длины (рис. 4). При этом продольный размер призмы существенно больше ее поперечных размеров. Поскольку боковая поверхность призмы свободна от напряжений, можно предположить, что среди компонент тензора напряжений главным по величине будет продольное нормальное напряжение σ_{33} , а среди компонент вектора напряженности электрического поля – продольная компонента E_3 . Кроме того, естественно предположить, что они являются функциями только продольной переменной x_3 и времени t . При таких предположениях решение сложных уравнений (1) заменится решением существенно более простого уравнения типа уравнения струны

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где u_3 – продольная компонента вектора смещений, c – постоянная, имеющая размерность скорости, связанная с константами материала выражением

$$c^2 = \frac{r}{\rho S_{33}(1 - k_3^2)}, \quad k_3^2 = \frac{d_{33}^2}{S_{33}\epsilon_{33}}.$$

Здесь ρ – плотность материала.

Для определения вынужденных колебаний или спектра резонансных частот призмы решение следует отыскивать в виде

$$u_3(x_3, t) = a(x_3)e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

где ω – в зависимости от постановки задачи либо частота вынужденных, либо собственных колебаний, a – амплитуда колебаний сечения стержня $x_3 = \text{const}$.

Подставляя (3) в (2), для определения $a(x_3)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 a_3}{dx_3^2} + \frac{\omega^2}{c^2} a_3 = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) необходимо дополнить граничными условиями, которые вытекают из условий закрепления призмы на концах.

На основе аналогичных предположений выводятся уравнения планарных колебаний пластины, поляризованных по толщине (см., например, [4, 5]).

Итак, приведенный пример показывает, как исходную сложную (трехмерную) задачу можно свести к более простой (одномерной).

В данном случае построение приближенной модели опирается на априорные, естественные с точки зрения здравого смысла, предположения (гипотезы) о характере распределения характеристик механического и электрического полей.

Однако, когда упрощенная модель построена на основе гипотез, возникает вопрос об области ее

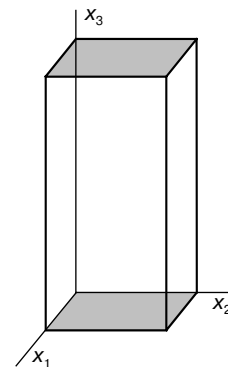


Рис. 4.

применимости. В данном случае, при каких соотношениях длины стержня к его поперечным линейным размерам можно с достаточной точностью определить смещения, напряжения, КЭМС и другие характеристики преобразователя, исходя из решения упрощенной задачи. Априори, из физических соображений известно, что в области высоких частот эта модель не пригодна. Далее, возникают вопросы: А что такое высокие частоты для выбранного образца: 30 кГц или 10 МГц? и др.

Чтобы ответить на эти вопросы, можно поставить серию экспериментов. Однако при этом возникают вопросы о точности самого эксперимента. Можно пойти по другому пути. Именно, не прибегая к гипотезам, а опираясь на строгие математические методы, попытаться упростить исходную трехмерную задачу. Такой подход позволяет, в частности, построить приближенные теории с более широкой областью применимости по параметрам задачи и получить некоторые оценки точности решения на основе простейших моделей.

Построение приближенных математических моделей различного уровня для элементов типа стержней, пластин и оболочек — это одно из направлений математической теории электроупругости, которым занимаются исследователи у нас и за рубежом начиная с 60-х годов, а в теории упругости со времен Эйлера, Бернулли (XVIII в.), Коши, Кирхгофа (XIX в.).

Это направление часто называют проблемой предельного перехода от трехмерных задач электроупругости к одномерным и двумерным. Одномерные и двумерные задачи, с точки зрения их решения аналитическими и численными методами, являются значительно более простыми в сравнении с трехмерными. Большинство из них может быть обчислено с помощью персональных компьютеров типа РС-486.

Главными в математическом аппарате, который используется в проблеме предельного перехода, являются метод малого параметра и асимптотические методы. Хотя эти методы для математической физики достаточно традиционны, однако их конкретное применение к задачам электроупругости, которые содержат в себе достаточно много параметров, представляет собой самостоятельную сложную задачу, требующую глубоких знаний в области теории упругости, электродинамики диэлектриков и общей теории дифференциальных уравнений.

Решения, основанные на асимптотическом методе, в том варианте, который применялся для построения приближенных теорий пластин и оболочек, позволяет получать удовлетворительные результаты для достаточно тонкостенных конструкций в низкочастотном диапазоне их колебаний.

Однако возникает вопрос о том, как рассчитывать элементы, которые не являются тонкостенными. Например, как рассчитать характеристики элемента, имеющего вид цилиндра, у которого высота соизмерима с радиусом, или как рассчитать тонкий

диск в области высоких частот, когда длина некоторой характерной волны соизмерима с поперечным размером диска. Такие задачи по существу являются трехмерными и для их исследования необходимо использовать полную систему уравнений электроупругости.

Проблемой предельного перехода и разработкой методов решения трехмерных уравнений электроупругости пришлось заниматься и мне начиная с 70-х — 80-х годов совместно с В.В. Мадорским, В.Е. Жировым, И.П. Гетманом, А.А. Матросовым и др. [6 — 11]. Объектами исследования были однородные и слоистые пластины и цилиндры, которые наиболее часто встречаются в преобразователях различного назначения. При разработке методов пришлось ориентироваться на те вычислительные средства, которые были в нашем распоряжении и которые обладали слабыми возможностями даже в сравнении с персональными компьютерами типа РС-386.

На основе проведенных математических исследований были разработаны численно-аналитические методы, позволяющие рассчитывать напряженно-деформированное состояние, распределение электрического поля, спектр собственных частот и др. для указанных выше типов элементов. Полученные результаты, помимо всего прочего, имеют еще одну ценность. Они могут служить тестом для оценки точности той или иной приближенной модели.

Выше, в разделе, посвященном примерам, я упомянул о вибродатчике, разработкой метода расчета которого пришлось заниматься в 1989 — 1990 годах. В то время это была одна из первых работ в нашей стране, в которой МКЭ был применен для расчета реальной, достаточно сложной конструкции датчика. Метод был доведен до такого уровня, что его можно было использовать на РС-386.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несколько слов о втором направлении, связанном с гибридными композитами. Прогнозирование их свойств требует специфических математических методов, развитием которых занимаются в разных странах; в России — на кафедре композитных материалов Московского государственного университета, кафедре теории упругости Ростовского государственного университета, в Петровском. Даже поверхностное описание имеющихся результатов потребовало значительных методических усилий и достаточно больших затрат времени. Отмечу только, что весомый вклад в развитие этого направления внес мой ученик, профессор, доктор физ.-мат. наук И.П. Гетман.

ЛИТЕРАТУРА

1. Устинов Ю.А. Электроупругость. Основы теории и некоторые приложения // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 3. С. 122 — 126.

2. *Джигунов Р.Г., Борисюк А.М.* Современные тенденции и направления развития пьезотехники. Фундаментальные проблемы пьезоэлектроники. Ростов-на-Дону: МП “Книга”, 1995. Т. 3. С. 5 – 12.
3. *Мэзон У.П.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке. М.: Иностранная литература, 1952. 447 с.
4. *Берленкур Д., Керран Д., Жаффе И.Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. Физическая акустика. Под ред. У. Мэзона. Т. 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований, часть А. М.: Мир, 1966. 592 с.
5. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Динамика связанных полей в элементах конструкций. Электроупругость. Киев: Наукова думка, 1989. 279 с.
6. *Мадорский В.В., Устинов Ю.А.* Симметричные колебания пьезоэлектрических пластин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 5.
7. *Мадорский В.В., Устинов Ю.А.* Построение системы однородных решений и анализ корней дисперсионных уравнений антисимметричных колебаний пьезоэлектрической плиты // Прикладная механика и техническая физика. 1976. № 6.
8. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* К теории неоднородных электроупругих плит // Прикладная математика и механика. 1979. Т. 43. В. 5. С. 923 – 932.
9. *Матросов А.А., Устинов Ю.А.* Однородные решения задачи об установившихся колебаниях пьезокерами-

ческого цилиндра // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. В. 6. С. 1045 – 1048.

10. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* Распространение волн в поперечно-неоднородных пьезоактивных волноводах // Акустический журнал. 1985. Т. 31. В. 3. С. 314 – 319.

11. *Гетман И.П., Рябов А.П., Устинов Ю.А.* О возможностях метода осреднения в задаче о распространении волн в электроупругом слое с периодической неоднородностью по толщине // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1987. № 3. С. 118 – 125.

* * *

Юрий Анатольевич Устинов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории упругости Ростовского государственного университета, член Национального Комитета по теоретической и прикладной механике, руководитель секции “Механика деформированного твердого тела” Головного Совета по механике, научный руководитель лаборатории “Электровязкоупругость” научно-исследовательского института механики и прикладной математики РГУ. Область научных интересов – математическая теория упругости, электроупругость, теория стержней, пластин и оболочек. Автор двух монографий и более ста других работ.