ОТ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ К АСИМПТОТОЛОГИИ

Л. И. МАНЕВИЧ

Московский физико-технический институт, Долгопрудный Московской обл.

FROM PERTURBATION THEORY TO ASYMPTOTOLOGY

L. I. MANEVITCH

Asymptotical approach which emerged initially in celestial mechanics as a means of refinement of the planetary orbits has transformed, within two centuries, into universal technique for solving of physical problems. Today, this approach is the basis of a methodological principle which facilitates development of physical intuition, formation of new concepts and revealing the relationship between theories of different levels.

Асимптотический метод, первоначально возникший в небесной механике как средство уточнения планетных орбит, за два с лишним века трансформировался в универсальный подход к решению физических задач. Этот метод лежит в основе методологического принципа, способствующего формированию физической интуиции и новых понятий, выявлению иерархической связи между теориями различного уровня.

ВВЕДЕНИЕ

Термин "асимптота" (asymptotos – по-гречески – не совпадающий) связан с наглядным геометрическим представлением о линии, к которой неограниченно приближается, никогда с ней не совпадая, некоторая кривая. В естествознании идея асимптотического приближения явилась итогом длительного развития теории возмущений планетных орбит, и долгое время казалось, что она имеет отношение лишь к небесной механике. В действительности, как теперь ясно, эта идея – одна из наиболее важных и глубоких в математике, особенно в той ее части, которая тесно соприкасается с физикой. И дело не только в том, что асимптотический подход оказался весьма эффективным при решении уравнений, описывающих те или иные физические процессы. Еще более важна его роль как методологического принципа, открывающего путь к углубленному пониманию и декомпозиции сложных систем, способствующего развитию физической интуиции, формированию новых понятий и выявлению иерархических связей между физическими теориями различного уровня... Именно в таком контексте американский математик М. Крускал предложил ключевое слово "асимптотология", утверждая этим универсальность асимптотических явлений, возможность рассматривать их с единой точки зрения, в какой бы форме и в какой бы области естествознания они ни наблюдались.

Двадцатый век показал, что введение таких понятий, как теория колебаний, теория катастроф, синергетика, кибернетика, наконец асимптотология, являющихся по сути своей междисциплинарными, играет мощную стимулирующую роль, поскольку развивает и синтезирует интуитивные представления, зачастую имеющие своими источниками весьма далекие один от другого по своему содержанию разделы науки.

Как же исторически возникла потребность в асимптотических приближениях? Почему эта потребность оказалась столь универсальной? Каковы основные идеи и специфика асимптотологии? Мы попытаемся ответить на эти вопросы, кратко остановившись на истоках и типичных приложениях асимптотического подхода.

1. ИСТОКИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Уже в исторически первой области теоретической физики – небесной механике – точное решение уравнений движения оказалось возможным лишь в простейшем случае задачи двух тел (Земля – Луна, Солнце – планета). “Расщепление” Солнечной системы на независимые пары небесных тел обеспечивало описание главных закономерностей их движения на основе ньютоновских аксиом механики и закона всемирного тяготения. Но в то же время обнаружились и некоторые несоответствия при сопоставлении с астрономическими наблюдениями. П.С. Лаплас – один из создателей теории возмущений планетных орбит – писал: “Если бы планеты подчинялись только действию Солнца, то описывали бы вокруг него эллиптические орбиты, но они влияют одна на другую, а также и на само Солнце. Из-за этих взаимных притяжений происходят возмущения и в эллиптических орбитах. Эти возмущения необходимо определить. Точное решение этой проблемы превосходит существующие в настоящее время возможности анализа. К счастью, малость масс планет по сравнению с массой Солнца, небольшие эксцентриситеты и взаимные наклоны большинства из орбит сильно облегчают задачу.” Попытки найти наиболее естественные и эффективные способы учета малых отклонений от решения задачи двух тел и привели, в конечном счете, к разработке теории возмущений. Таким образом, сам этот метод был вызван к жизни насущной необходимостью ответа на вопросы, поставленные именно небесной механикой.

Вначале применялась самая простая с идейной точки зрения, хотя и громоздкая техника: вычисление приращений координат и скоростей планет из дифференциалов за малые последовательные интервалы времени. При этом предсказания получаемых астрономических таблиц оказывались достоверными лишь для малых времен прогнозирования и, главное, не достигалось более глубокое понимание закономерностей, присущих рассматриваемым динамическим системам. Дальнейший прогресс (Клеро, Лагранж, Лаплас) во многом был обусловлен изменением точки зрения. Предлагалось следить прежде всего не за локальными, а за глобальными параметрами, которые в предельном случае задачи двух тел являются постоянными, но медленно эволюционируют при наличии возмущений. В таком случае удается ввести медленные и быстрые переменные, причем усреднение по быстрым переменным оказывается естественным первым шагом при решении проблемы. Лаплас писал: “Самый простой способ анализа различных возмущений заключается в том, чтобы вообразить себе планету, движущуюся в согласии с законами эллиптического движения по эллипсу, элементы которого плавно изменяются, и одновременно представить себе, что настоящая планета колеблется вокруг этой воображаемой линии с очень малой амплитудой, причем свойства этих колебаний зависят от периодических возмущений.” И величины поправок к решению задачи двух тел, и характерные времена их изменения определяются величинами присущих рассматриваемой задаче малых параметров, которые характеризуют отношения масс планет и Солнца. Конечно, хотелось иметь возможность последовательного уточнения, чтобы решение можно было представить сходящимися рядами по таким параметрам. Однако какого-либо строгого обоснования теория возмущений не имела, а попытка получить решение в более высоких приближениях наталкивалась на принципиальную трудность – появление так называемых “малых знаменателей”, которые как бы увеличивали “вес” поправок, содержащих множителями малые параметры, и разрушали надежду на сходимость. Такая ситуация представлялась парадоксальной: с одной стороны, отбрасывание слагаемых с малым параметром в более высоких степенях становилось неоправданным, а с другой, и без их учета достигалось разумное соответствие с результатами астрономических наблюдений.

Лишь в последней трети девятнадцатого века А. Пуанкаре и А.М. Ляпунов получили строгие результаты относительно сходимости, развивая одну из модификаций теории возмущений – метод малого параметра, не предполагающий разделения переменных на быстрые и медленные, но применимый лишь к отысканию периодических режимов (вопрос о том, какие значения малого параметра обеспечивают сходимость разложения, при этом оставался открытым). В то же время Пуанкаре сделал очень важный шаг, проливающий свет на отмеченный выше парадокс. Он впервые понял, что разложения по малым параметрам, используемые в астрономии, не обязательно должны сходиться. Они могут представлять собой объекты особой природы – асимптотические ряды. Несмотря на расходимость, такие ряды в некотором смысле хорошо приближают искомые функции. Если сходящийся ряд представляет функцию при $x = x_0$, $n \longrightarrow \infty$ (n – число членов ряда), то асимптотический – при $n = n_0$, $x \longrightarrow x_0$. Тем самым, впервые в математике возникла ситуация, когда абсолютная точность недостижима даже в принципе: в каждой конкретной системе малый параметр имеет вполне определенное, конечное значение. Сама мысль, что функция может быть определена расходящимся асимптотическим рядом, была совершенно чужда сознанию девятнадцатого века. Тем не менее, хорошие приближения, как оказалось, достигаются при небольшом числе членов и достаточной малости параметра разложения, хотя с увеличением числа учитываемых членов точность аппроксимации (из-за расходимости!) ухудшается (рис. 1).

Даже выдающимся математикам XX века казалось, что работа Пуанкаре лишь уничтожает давнишние иллюзии астрономов и надежду на обоснование их результатов, однако уже через несколько лет

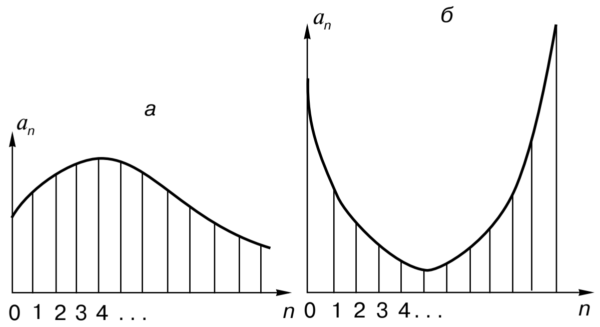

Рис. 1. *а* – Поведение членов сходящегося ряда при фиксированном x и $n \longrightarrow \infty$ (при больших n члены ряда убывают); *б* – поведение членов асимптотического ряда при фиксированном x и $n \longrightarrow \infty$, наилучшее приближение достигается, если ограничиться пятью членами ряда, при дальнейшем росте n члены ряда возрастают.

стало ясно, что речь идет о совершенно новом, высокоэффективном математическом аппарате. Приложения этого аппарата в течение длительного времени касались лишь небесной механики. Такое положение имело веские основания. Дело в том, что основное внимание в физике XIX века уделялось точно решаемым проблемам акустики, гидродинамики, теории упругости, оптики. В этих проблемах, как правило, оказывалось достаточно линейного приближения, то есть исходные уравнения либо линеаризовались (отбрасывались нелинейные члены – гидродинамика, теория упругости), либо изначально были линейными (оптика). Фактически такие точно решаемые проблемы играют в физике ту же роль, что задача двух тел в небесной механике. Но в отличие от последней, где важность поправок к эллиптическим движениям с самого начала была очевидной, здесь учет нелинейных эффектов долгое время был невостребованным. Развитие физики твердого тела, теории колебаний, гидродинамики, теории упругости, радиоэлектроники, теории плазмы, оптики, электродинамики, общей теории относительности в XX веке показало принципиальную недостаточность линейного приближения к описанию нашего мира. Стало ясно, что даже малые отклонения от линейности могут привести к качественно новым эффектам (тепловое расширение твердых тел, автоколебания, срыв вынужденных колебаний, неустойчивости в жидкостях, твердых телах, плазме), причем линейная теория должна выступать как первое приближение в рамках теории возмущений. Оказалось, что и в сложных линейных задачах (а с открытием изначально линейной квантовой механики такие задачи стали гораздо более разнообразными) асимптотический подход является зачастую наиболее эффективным средством анализа. При этом в роли малых параметров выступают такие величины, как относительная толщина твердого тела или слоя жидкости, отношение вязкости жидкости к ее инерционной характеристике, отношение расстояния между атомами к характерной длине волны в кристалле (некоторые другие примеры будут приведены ниже). Было осознано, что наличие того или иного малого параметра есть, как правило, важнейшая предпосылка успешного анализа физической проблемы. Резкое расширение сферы применения асимптотической методологии, ее выход за рамки небесной механики привели к разработке новых схем реализации асимптотического подхода с использованием зачастую далеко не очевидных параметров разложения.

Через полвека после метода малого параметра Пуанкаре–Ляпунова получила наконец строгое обоснование схема усреднения (Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский), незадолго до этого "перенесенная" Б. Ван-дер-Полем из небесной механики в теорию колебаний. Уже в последние десятилетия эта схема была обобщена на широкий класс континуальных систем, описываемых уравнениями с частными производными. Особое место в ряду асимптотических методов заняла теория сингулярных возмущений, имеющая дело с уравнениями, которые содержат малый параметр в коэффициентах при старших производных (А.Н. Тихонов, В.П. Маслов). Совершенно новые представления обогатили асимптотический подход в теории Колмогорова–Арнольда–Мозера и теории ренормализационной группы (ренормгруппы). Старые и новые асимптотические идеи охватили едва ли не всю современную физику. И эта их универсальность имеет глубокий смысл, на чем следует остановиться подробнее.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД И СИММЕТРИЯ

Почти любая физическая теория, сформулированная в общем виде, очень сложна с математической точки зрения. Поэтому и при создании теории, и в дальнейшем ее развитии особое значение имеют простейшие предельные случаи, допускающие аналитические решение. В этих предельных случаях обычно уменьшается число уравнений, понижается их порядок, становится возможным переход от дискретной системы к сплошной среде или от неоднородной среды к однородной, процесс локализован вблизи границы рассматриваемой области, нелинейные уравнения заменяются линейными и т.п.

Но за всеми этими идеализациями, сколь бы различными они ни казались, стоит высокая степень симметрии, присущая математической модели рассматриваемого явления в предельной ситуации. Асимптотический подход к сложной, "нерешаемой" задаче состоит, по сути, в трактовке исходной (недостаточно симметричной) системы как близкой к некоторой симметричной. Принципиально важно, что определение поправок, учитывающих отклонения от предельного случая, гораздо проще, чем непосредственное исследование исходной системы.

На первый взгляд, возможности такого подхода ограничены узким диапазоном изменения параметров системы. Однако опыт исследования различных физических задач показывает, что при значительном изменении параметров системы и удалении ее от одного предельного симметричного случая, как правило, существует другая предельная система, часто с менее очевидной симметрией, и возмущенное решение можно строить уже для нее. Это позволяет описать поведение системы во всем диапазоне изменения параметров, опираясь на небольшое число предельных случаев.

Такой подход, в максимальной степени соответствуя физической интуиции и способствуя ее развитию, в то же время приводит к формированию новых физических понятий. Так, важное в гидромеханике понятие пограничного слоя имеет ярко выраженный асимптотический характер и связано с локализацией у границ обтекаемого тела той области, где влиянием вязкости жидкости пренебречь нельзя. Аналогичные явления в механике деформированного твердого тела и теории электричества называются соответственно краевыми и скин-эффектами. Подобные примеры далеко не единичны.

Не менее важен и другой аспект. А. Эйнштейн отмечал, что "лучший жребий физической теории – послужить основой для более общей теории, оставаясь в ней предельным случаем". Выявление соответствия между сменяющими друг друга физическими теориями и оценка области применимости "старой" теории – тоже в ряду возможных приложений асимптотического подхода.

3. НЕКОТОРЫЕ ИДЕИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО УПРОЩЕНИЯ И СПОСОБЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

Уменьшение размерности системы, континуализация и гомогенизация

Высокий порядок алгебраических или дифференциальных уравнений, большое число таких уравнений – все это проявление одной из принципиальных трудностей, возникающих при решении физических задач, которую называют иногда "проклятием размерности". Для ее преодоления выработаны два диаметрально противоположных подхода. Если отдельные элементы рассматриваемой системы сильно различаются своими характеристиками, то можно ввести малые параметры, представляющие собой их отношения, и осуществить асимптотическую редукцию размерности (уменьшить число степеней свободы). Типичные примеры такой ситуации возникают (об этом шла речь выше) в небесной механике, где в качестве предельного случая выступает точно решаемая задача двух тел. Реализация учета малости отклонений от решения предельной задачи может быть достигнута, как мы уже отмечали, при помощи метода усреднения. Принципиальный вклад в понимание и разрешение возникающих здесь трудностей внесла теория Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ-теория), которая впервые прояснила характер усложнений в поведении возмущенной системы, вытекающих из существования малых знаменателей.

Если же рассматриваемая система состоит из множества однотипных элементов, то асимптотический подход связан уже не с редукцией размерности, а, напротив, с ее повышением. Так мы приходим к весьма важному классу физических моделей, в которых дискретные системы заменяются континуальными (непрерывными). Малый параметр возникает, если, например, характерный пространственный масштаб процесса существенно превышает расстояние между однотипными элементами. Степеней свободы при этом становится больше (вместо счетного множества – континуум), но это усложнение компенсируется более высокой степенью симметрии уравнений движения сплошной среды.

Рассмотрим для примера продольные колебания цепочки, состоящей из равных масс m, соединенных пружинами одинаковой длины l и жесткости c. При плавной пространственной форме колебаний возникает малый параметр $\varepsilon = l/L$, где L – характерная длина волны. Если $\varepsilon \ll 1$, цепочка заменяется сплошным стержнем, а поправки к решению, соответствующему этой предельной системе, могут быть найдены при помощи одной из модификаций асимптотического метода. С уменьшением пространственного периода колебаний растет погрешность приближенных решений, полученных таким путем, но тогда в системе возникает другой малый параметр. Действительно, рассмотрим предельный случай, соответствующий минимальной длине волны (пилообразная форма колебаний). Такой форме может быть сопоставлена непрерывная модулирующая функция, принимающая постоянное значение (рис. 2). Для волн, близких по длине предельной, модуляция уже не будет описываться постоянной по пространственной координате функцией, но ее изменение будет плавным. Тогда в качестве малого параметра можно принять отношение расстояния между массами к характерному периоду модуляции.

Переход от дискретных моделей к непрерывным широко применяется в физике; по существу, на этом построена вся механика сплошных сред. Но далеко не всегда дело обстоит так просто, как в рассмотренном случае. Скажем, в жидкости нельзя выделить периодическую равновесную структуру, относительно которой совершаются колебания. Тем не менее, на макроскопическом уровне мы воспринимаем течение жидкости как движение сплошной среды, что передается непрерывной моделью жидкости. В ней, правда, непрерывность достигается благодаря усреднению мелкомасштабных

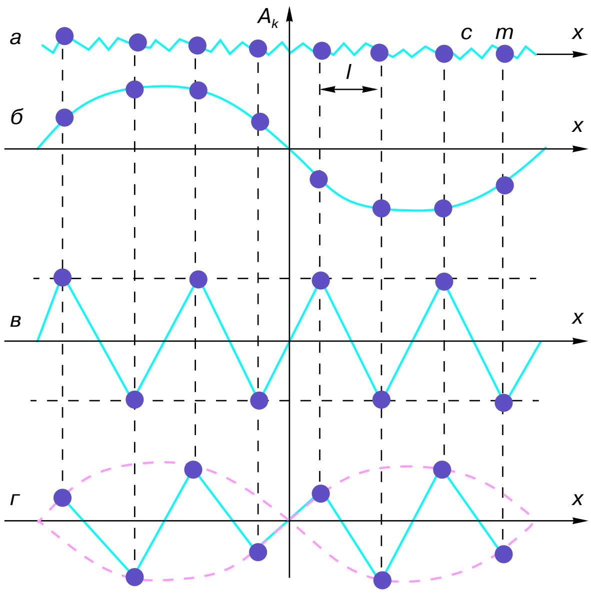

Рис. 2. Схема бесконечной цепочки грузов массы *m*, соединенных пружинами равной длины *l* и жесткости *c* (*а*). Форма продольных колебаний этих грузов для больших длин волн (*б*); в предельном случае минимальной длины волны (*в*) и асимптотическое решение для случаев, близких к предельному (*г*). На графиках представлены зависимости от координаты *x* амплитуды колебания A_k, связанной со смещением *k*-го груза соотношением $U_k = A_k \sin(\omega t)$, где $\omega(m, c)$ – частота соответствующего нормального колебания, *t* – время. Штриховыми линиями показаны огибающие (модулирующие функции) для волн малой длины.

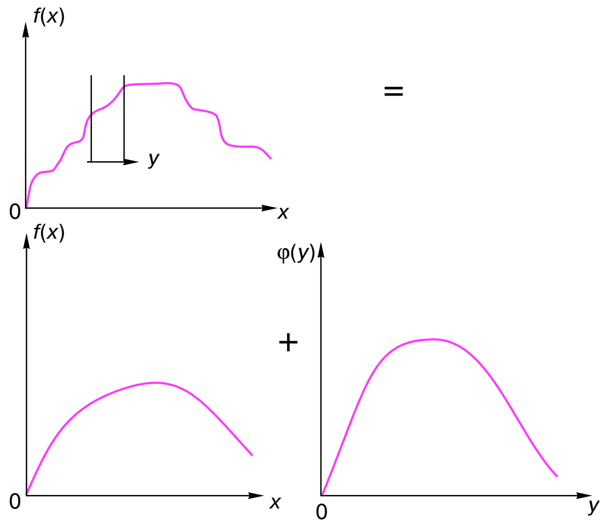

Рис. 3. Графическое представление сути метода усреднения. Изображенный в верхней части рисунка сложный процесс можно исследовать в два этапа. Сначала на график смотрят "в телескоп", отвлекаясь от быстрых осцилляций с характерным временем (и заменяя кривую некоторой средней. Затем изучают отдельную неоднородность, увеличивая при этом масштаб в ε^{-1} раз, то есть глядят на нее в "микроскоп".

(микроскопических) движений при изучении макроскопических процессов. В результате такого усреднения и происходит переход к непрерывным уравнениям гидродинамики.

Вообще, быстрое изменение одних переменных и медленное – других, с чем впервые столкнулась небесная механика, – характерная черта многих физических систем. Мысль о том, чтобы сначала изучить глобальную структуру рассматриваемой системы, отвлекаясь от локальных особенностей, а затем уже исследовать систему локально, представляется во всех таких случаях весьма естественной. На это и направлен метод усреднения: вводятся "медленные" (макроскопические) и "быстрые" (микроскопические) переменные, уравнения для которых разделяются и могут решаться независимо друг от друга или последовательно (рис. 3).

Мы уже отмечали, что первоначально этот метод получил широкое распространение в задачах небесной механики и теории нелинейных колебаний, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Сегодня он успешно применяется для решения дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами в таких важных для практики дисциплинах, как теория композитов или расчеты ребристых, гофрированных, складчатых и других оболочек. Исходная неоднородная среда либо конструкция сводится к однородной с некоторыми эффективными характеристиками (такую процедуру называют гомогенизацией). Метод усреднения позволяет не только получать эффективные характеристики, но и исследовать неоднородное распределение механических напряжений в различных материалах и конструкциях, что очень важно для оценки их прочности (рис. 4).

Использование асимптотического подхода далеко не всегда оговаривается специально, а иногда даже не осознается до конца. Так, в инженерной практике чрезвычайно широкое распространение получили модельные системы с одной степенью свободы (осциллятор, простой маятник и т.п.). Ясно, что использование таких моделей предполагает асимптотическую редукцию размерности и принципиальную возможность определения соответствующих поправок, но ясное указание на это можно встретить нечасто.

Ренормализация

К сожалению, простое усреднение мелкомасштабных движений применимо не во всех случаях. Встречаются такие задачи, в которых даже на макроскопическом уровне заметно проявляются движения различных масштабов. К ним относится,

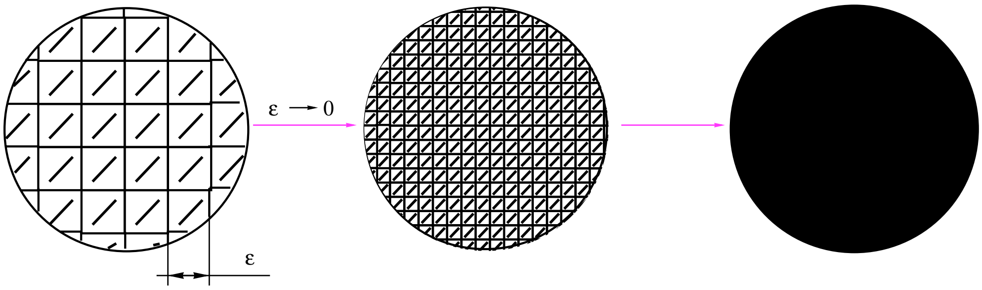

Рис. 4. Схема, иллюстрирующая применение метода усреднения при исследовании композитных (неоднородных) материалов. Отвлекаясь от микроструктуры неоднородностей и устремляя их характерный размер к нулю, производят усреднение и заменяют неоднородный материал с периодической структурой однородным с некоторыми средними (приведенными) параметрами. В то же время асимптотический подход позволяет оценить и микродеформации (напряжения) в композите, обусловленные периодичностью его структуры.

например, изучение так называемых критических явлений, связанных с фазовыми переходами, или турбулентности. При этом приходится проводить усреднение последовательно для всех масштабов, что составляет суть метода ренормализационной группы (ренормгруппы). Строгая реализация этой процедуры сопряжена с огромными техническими трудностями. Один из способов их преодоления подсказывает совершенно неожиданная асимптотика. Дело в том, что в воображаемом мире с четырьмя пространственными измерениями эти трудности не возникают и удается осуществить обычное усреднение. Нельзя ли рассматривать этот случай как предельный, а величину $\varepsilon = 4 - d$ (d – размерность пространства) как малый параметр? В реальном трехмерном мире $d = 3$ и $\varepsilon = 1$, и все же асимптотическое разложение по параметру оказывается весьма эффективным при решении сложнейших задач физики критических явлений.

Исключительная важность метода ренормгруппы обусловлена тем, что, как пишет один из ее создателей, лауреат Нобелевской премии Дж. Вильсон: “Подход, основанный на ренормгруппе, дает стратегию для решения проблем, в которых участвует много масштабов длин. Стратегия сводится к тому, чтобы двигаться маленькими шагами – по шагу на каждый масштаб длин. Подход ренормгруппы сводится к интегрированию по флуктуациям по очереди, начиная с флуктуаций на атомном масштабе, постепенно двигаясь к большим масштабам, пока не будет произведено усреднение по флуктуациям всех масштабов.”

Локализация. Регулярные асимптотики и пограничные слои

Отклонение реальной системы от ее предельной идеализации могут иметь различный характер. Иногда они малы во всей области изменения параметров. Так бывает, когда параметры исходной (идеальной) системы претерпевают незначительные изменения. Например, если рассматривается слабо анизотропная среда (то есть ее свойства слабо зависят от направления), то для построения первого приближения можно перейти к изотропному случаю. Если отклонения реального процесса от идеализированного малы во всей рассматриваемой области или во всем рассматриваемом временном диапазоне, то говорят о регулярном возмущении.

О важности учета малых составляющих решения свидетельствует следующий пример. Некоторое время считалось, что черная дыра – массивное коллапсирующее тело – не может излучать. Однако в 1974 году С. Хокинг показал, что это заблуждение, основанное на следующем обстоятельстве. Согласно общей теории относительности, радиус коллапсирующего тела изменяется по закону

$$r = r_g[1 + \exp(-ct/r_g)],$$

где c – скорость света, а r_g – гравитационный радиус, то есть минимальный радиус черной дыры. В этом выражении обычно пренебрегали крайне малым экспоненциальным членом. Если же его учесть, то оказывается, что черные дыры не только могут, но и должны излучать фотоны с длиной волны порядка r_g.

Нередко отклонения истинного решения от первого приближения велики, но локализованы в малой области. Так, если жидкость обтекает тело, то всюду, за исключением узкого слоя у поверхности тела, течение можно считать потенциальным и не учитывать малую вязкость жидкости, входящую в коэффициенты при старших производных в уравнениях движения. Вблизи поверхности учет вязкости, однако, необходим, так как в этой области ее малая величина компенсируется быстрым изменением характеристик потока. Толщина пограничного слоя с уменьшением вязкости стремится к нулю, а изменение характеристик потока вблизи обтекаемой поверхности становится бесконечно быстрым, отсюда термин “сингулярная асимптотика”. Приближение пограничного слоя в гидродинамике послужило прообразом современной математической теории сингулярных возмущений.

Локальная и нелокальная линеаризация

Выделенные асимптотические приближения при всей их эффективности не гарантируют преодоления математических трудностей, если уравнения физической теории нелинейны. В этом случае на помощь приходит линеаризация – асимптотический метод, использующий представление о процессах малой интенсивности.

Линейный подход позволил сформировать такие фундаментальные представления и понятия, как спектр, собственная функция, нормальные колебания. Последнее означает, что для линейной системы с n степенями свободы при отсутствии трения всегда можно выбрать такие "нормальные" координаты, в которых она описывается уравнениями колебаний не связанных между собой маятников. Это понятие естественно обобщается и на непрерывные системы, в которых решение выбирается в виде ряда Фурье по тригонометрическим или другим периодическим функциям пространственных переменных. Иными словами, любое движение линейной системы представляется в виде линейной комбинации нормальных колебаний. Принципиально важно, что такие колебания выделены не только математически, но и физически. Так, под воздействием внешней силы "резонировать" в системе будут именно нормальные колебания.

Если рассматривать линейную систему как первое приближение нелинейной (в этом суть локальной линеаризации), то при учете нелинейных поправок в уравнениях второго и последующего приближений появляются эффективные внешние нагрузки, вызывающие резонанс в нормальных колебаниях.

Однако сильно нелинейные системы, особенно высокой размерности, нельзя описать ни в каком приближении метода локальной линеаризации. Поэтому до недавнего времени сочетание высокой размерности с сильной нелинейностью выглядело непреодолимой преградой для исследования физической системы. Но в последние годы был открыт весьма широкий класс многомерных нелинейных систем, допускающих такое исследование. Эти системы, получившие название интегрируемых, имеют частные решения в виде уединенных волн – солитонов, представляющих собой в некотором смысле аналог нормальных колебаний в линейных системах. Возникло нелинейное обобщение метода Фурье – метод обратной задачи рассеяния, в котором солитоны играют фундаментальную роль, во многом представляя собой аналог разложения Фурье. Метод обратной задачи рассеяния можно трактовать как нелокальную линеаризацию исходного нелинейного уравнения. Иначе говоря, скрытые симметрии нелинейного уравнения позволяют найти преобразования, сводящие построение широкого класса решений к анализу линейных уравнений. В рамках асимптотического подхода интегрируемые системы, в свою очередь, могут выступать в качестве первого приближения при анализе близких к ним, но не интегрируемых.

Малые параметры и развитие конкретных областей физики

Подчас сам прогресс в той или иной области физики неразрывно связан с существованием характерных асимптотических параметров. В частности, малость знаменитой постоянной тонкой структуры ($\alpha = e^2/hc$; e – заряд электрона, h – постоянная Планка, c – скорость света) позволяет в рамках квантовой электродинамики с высокой точностью рассчитать взаимодействие фотонов и электронов. Этот безразмерный параметр определяет интенсивность электромагнитных взаимодействий. Все основные результаты квантовой электродинамики, с поразительной точностью описывающие экспериментальные данные, получены именно благодаря возможности применения теории возмущений, в которой решения уравнений ищутся в виде разложений по степеням α. Аналогичные параметры для сильновзаимодействующих частиц – адронов (к которым относятся, например, протоны и нейтроны) превышают α во много раз. Это главная причина принципиальных трудностей, в свое время тормозивших развитие теории сильных взаимодействий. Только открытие кварковой структуры адронов и явления "асимптотической свободы", заключающегося в ослаблении взаимодействия между кварками и связывающими их глюонами на малых расстояниях, резко изменило ситуацию и привело к рождению новой теории сильных взаимодействий – квантовой хромодинамики.

Однако нередко случается так, что возможности и пути использования присущих конкретной области физики малых или больших параметров могут быть осознаны в полной мере не сразу. Так, зависимость свойств в некоторой точке среды от выбранного направления (анизотропия) или ее положения (неоднородность) долгое время считалась лишь усложняющим фактором. Действительно, многие методы, развитые ранее для изотропной однородной среды со свойственными только ей симметриями, оказываются в этой ситуации непригодными. Однако, как выяснилось впоследствии, возможны и особые предельные случаи сильной анизотропии или неоднородности, на которые до этого просто не обращали внимания. Разработка и применение соответствующих асимптотических методов вызвали быстрое и всестороннее развитие теории таких сред. Полученные при этом уравнения в ряде случаев выглядят даже проще, чем их "изотропные и однородные" аналоги.

Другой пример – физика полимеров, которая еще несколько десятилетий назад находилась на периферии теоретической физики, хотя и имела ряд важных достижений, включая объяснение физической природы упругости резины. Большая длина составляющих полимерные тела макромолекул безусловно представляет главную трудность, если иметь в виду детальную теорию, описывающую физические эффекты на всех пространственных и временны́х масштабах. Но стоит изменить постановку задачи и поставить вопрос о свойствах полимерного вещества, обусловленных именно спецификой макромолекул, как возникает основа для создания содержательной и глубокой теории. При этом ее достижения решающим образом обусловлены наличием естественных для полимерных систем малых и больших параметров.

Первым очевидным большим параметром для таких систем является число атомов в цепи $N \gg 1$. Наличие этого параметра позволяет рассматривать даже отдельную полимерную молекулу как макроскопическую систему и использовать эффективную процедуру усреднения, лежащую в основе статистической физики. Изучение асимптотического поведения полимерных систем при $N \gg 1$ стало одной из важнейших задач физики полимеров. В частности, такая фундаментальная характеристика, как средний размер r полимерного клубка в растворе или расплаве полимера, определяется соотношением $r \sim N^{\eta}$, где величина показателя степени зависит от физических условий, в которых находится полимерная система. Кроме того, полимерным системам присущи малые параметры, обусловленные характерной для них иерархией взаимодействий. Ковалентное взаимодействие (химическая связь) атомов вдоль цепи намного сильнее всех других (физических) взаимодействий. Это позволяет в обычных условиях считать последовательность атомов вдоль цепи фиксированной. Различные физические взаимодействия также заметно отличаются по интенсивности. Простейшая асимптотика соответствует пренебрежению всеми физическими взаимодействиями (при фиксированных длинах связей). Следующий шаг состоит в учете физических взаимодействий между звеньями полимерной цепи, "ответственных" за ее сопротивление изгибу и скручиванию (по-прежнему без изменения длин связей). Наконец могут быть "включены" и взаимодействия между близкими в пространстве (но не соседними по цепи!) звеньями скрученной и изогнутой полимерной цепи.

Асимптотическое соответствие физических теорий

В процессе развития науки каждая новая теория рассматривалась обычно как отрицание уже существующей, то есть на первый план выдвигалась несовместимость старых и пришедших им на смену представлений и концепций. Лишь после того как сформулированный Н. Бором принцип соответствия сыграл важную конструктивную роль в создании квантовой механики, преемственность научных теорий стала предметом всестороннего изучения физиков и философов.

Хотя и сегодня есть различные, в том числе и взаимоисключающие, точки зрения на соотношение сменяющих друг друга теорий, можно непосредственно убедиться в существовании вполне определенной математической связи между ними. Эта связь и выражается асимптотическим соответствием, проявляющимся в разнообразных, зачастую далеко не очевидных формах. Иначе говоря, существуют различные типы предельных переходов от новой теории к старой, как правило, при нулевых или бесконечных значениях некоторых параметров или переменных.

Новая теория может рассматриваться как обобщение существующей, однако это обобщение не только количественное, но и качественное, поэтому она включает совершенно непредвиденные в рамках старой теории возможности. Часто такие возможности наиболее отчетливо проявляются в противоположных предельных случаях, когда параметр, полагавшийся малым, становится большим и наоборот. Эффекты, игравшие главную роль, оказываются теперь второстепенными, так что новое содержание теории воспринимается, как говорится, в чистом виде. Обсуждение конкретных примеров выходит, однако, за рамки этой статьи, но оно содержится в книгах и статье, приведенных в списке литературы [1]. Отметим только, что эвристическая роль идеи асимптотического соответствия, в наибольшей мере проявившаяся при создании квантовой механики, особенно возрастает в наше время, когда предпринимаются попытки построения единой теории, объединяющей все фундаментальные взаимодействия природы. В рамках такой теории сами понятия электромагнитного, слабого, сильного и гравитационного взаимодействий должны стать асимптотическими.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Повышенный интерес к асимптотическим методам математической физики в последние годы тем более примечателен, что успехи вычислительной техники, казалось бы, должны были привести к противоположной тенденции. Главное, пожалуй, в том, что асимптотические методы всемерно развивают нашу интуицию и поэтому играют важную роль в формировании мышления современного ученого-естественника или инженера. Даже в тех случаях, когда основной целью остается получение численных результатов, предварительный асимптотический анализ позволяет выбрать лучший вычислительный метод и разобраться в обширном, но неупорядоченном числовом материале. Кроме того, такой анализ особенно эффективен в тех областях значений параметров, где машинные вычисления встречают серьезные затруднения. Недаром Лаплас говорил, что асимптотические методы "тем точнее, чем нужнее". Поэтому следует согласиться с мыслью Р.Г. Баранцева о неизбежности их проникновения и в школьные программы. Очень важно обучать самим принципам "асимптотического мышления", развивать способность к такому мышлению, причем осознанному, поскольку все специалисты-естественники используют элементы асимптотического подхода в своей работе, подчас даже не давая себя в этом отчета.

Статья подготовлена при поддержке Соросовской Образовательной Программы, которой автор выражает благодарность. Автор благодарен В.В. Смирнову и Ш.А. Шагиняну за техническую помощь и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андрианов И.В.*, *Маневич Л.И.* Две ипостаси асимптотики // Природа. 1987. № 4. С. 85 – 97; Асимптотические методы и физические теории. М.: Знание, 1989; Асимптотология: идеи, методы, результаты. М.: АСЛАН, 1994.

2. *Андрианов И.В.*, *Лесничая В.А.*, *Маневич Л.И.* Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985.

3. *Бабич В.М.*, *Булдырев В.С.* Искусство асимптотики // Вестник Ленинградского университета. 1977. № 13. С. 5 – 12.

4. *Баранцев Р.Г.* Об асимптотологии // Вестник Ленинградского университета. 1976. № 1. С. 69 – 76.

5. *Баренблат Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.

6. *Бахвалов Н.С.*, *Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.

7. *Блехман И.И.*, *Мышкис А.Д.*, *Пановко Я.Г.* Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. М.: Наука, 1983.

8. *Вильсон Дж.Н.* Ренормгруппа и критические явления // Успехи физических наук. 1983. Т. 141. № 2. С. 193 – 220.

9. *Гайденко П.П.* Природа и идеализированный объект // Природа. 1986. № 11. С. 84 – 92.

10. *Маневич Л.И.* Линейная и нелинейная математическая физика: от гармонических волн к солитонам // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 1. С. 86 – 93.

11. *Маневич Л.И.*, *Павленко А.В.*, *Коблик С.Г.* Асимптотический метод в теории упругости ортотропного тела. Киев: Выща школа, 1981.

12. *Тер-Крикоров А.М.* Нелинейные задачи и метод малого параметра. М.: Знание, 1984.

* * *

Леонид Исакович Маневич, профессор Московского физико-технического института, зав. сектором Института химической физики РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика, асимптотические методы, физика полимеров, механика сплошной среды. Автор более 250 статей и 8 монографий.