WHAT IS "FINANCIAL MATHEMATICS"

S. I. SPIVAK

The problems of finance and actuarial mathematics are discussed – the mathematical analysis of financial risk. Examples of insurance practice are given.

Обсуждаются проблемы финансовой и актуарной математики – математический анализ финансового риска. Приводятся примеры из страховой практики.

ЧТО ТАКОЕ ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

С. И. СПИВАК

Башкирский государственный университет, Уфа

Ничем не рискуя, ничего не заработаешь.

(Английская пословица)

В последние годы в нашей стране значительные изменения произошли в сфере приложений математики. Если раньше развитие прикладной математики в решающей степени стимулировало задачи естественных наук и связанных с ними отраслей промышленности (что в значительной степени явно или неявно определялось военно-промышленным комплексом), то сегодня трудности в этих областях заставили математиков активно искать новые сферы приложения своих знаний.

Социально-экономические причины перенесли интересы, во всяком случае специалистов по прикладной математике, на новые области, которые практически не были известны в нашей стране до начала 90-х годов. Активное развитие банковской, страховой, инвестиционной деятельности поставило необходимость привлечения в эти области специалистов совершенно нового для нашей страны типа. Одной из новых для нашей страны областей оказалась финансовая математика.

Первая компания по страхованию жизни, действующая на научных принципах, была организована в Лондоне в 1762 году (Справедливое Общество Страхования Жизни). Секретарю этой компании, который регистрировал собрания руководства, а также выписывал полисы страхователям, было дано название *актуарий* (англ. *actuary*, лат. *actuarius* – скорописец, счетовод). В 1775 году на этот пост был назначен математик. Он был ответствен за вычисление приемлемых ставок страховых взносов и обеспечивал надежность финансовых операций компании. С тех пор название *актуарий* стало все шире употребляться для тех, кто выполнял эту финансовую и математическую работу.

Область математики, которая занимается математическими проблемами финансов, называется *актуарная математика*. Процитируем Правительственного Актуария Великобритании К. Дэйкина [1]:

> Актуарий – это человек, который обладает определенной квалификацией для оценки рисков и вероятностей и который применяет свои умения к проблемам бизнеса и финансов, особенно к таким областям деятельности, как страхование и демография, связанных со случайными событиями.

Из этого определения ясно, что актуарий должен сочетать в себе достаточно серьезную математическую квалификацию с квалификацией в области бизнеса – экономической и юридической. Вместе с соответствующими экономическими и юридическими дисциплинами актуарная математика образует *актуарную науку*, которая, в свою очередь, является теоретической основой *актуарной деятельности*. Актуарий на Западе сегодня – это профессия, специалистов по которой готовят на факультетах прикладной математики университетов.

В современном понимании актуарий – это эксперт в математике страхования [2, 3]. При этом страхование (и соответствующая ему математика) не сводится только к страхованию жизни и имущества. Страхование понимается в более широком смысле, а именно, как страхование финансового риска в самом широком смысле, что включает, например, игру на рынке ценных бумаг.

Актуариев сегодня часто называют социальными математиками, так как они играют ключевую роль в определении стратегии и политики не только страховых компаний, но и пенсионных и других фондов; правительственные актуарии ответственны за вопросы национального страхования, государственных пенсионных и других схем.

Актуарии традиционно играли главную роль в страховании жизни [4]. Комбинирование моделируемой смертности и вероятностей выживания с пониманием математики финансов было сердцевиной раннего развития данной профессии.

Первые научные работы по страхованию связаны с именами Э. Галлея (тот самый, имя которого носит комета Галлея) и Де Муавра (достаточно известный ученый в области теории вероятностей): первый из них в 1693 году составил первые таблицы смертности и связал с ними величины пожизненных рент, второй рассмотрел проблему страховых взносов при страховании жизни.

Внедрение вероятностной идеологии в страхование основано на законе больших чисел, центральной предельной теореме, теории процессов типа пуассоновского, иначе говоря, на сведениях, которые есть во всех классических курсах теории вероятностей и математической статистики.

Рассмотрим некоторые схемы страхования и проведем их математический анализ [5].

Простейший вид страхования жизни заключается в следующем. Человек платит страховой компании p рублей (эта сумма называется *страховой премией*), а компания соглашается выплатить наследникам застрахованного b рублей в случае его смерти в течение года (и не платит ничего, если этот человек не умрет в течение года). Величина *страховой выплаты*, конечно, много больше, чем страховая премия: $b \gg p$, и нахождение “правильного” соотношения между ними – одна из важнейших задач актуарной математики.

Купив за p рублей страховой *полис*, застрахованный избавил себя от *риска* финансовых потерь, связанных с неопределенностью момента смерти. Этот риск приняла на себя страховая компания. Для страховой компании риск, связанный с этим человеком, заключается в случайности *иска*, который может быть ей предъявлен: если застрахованный не умирает в течение года, то иск равен 0; если он умирает, то иск равен b.

Важнейшим обстоятельством, которое играет решающую роль в дальнейшем исследовании, является тот факт, что иск ξ является случайной величиной. Распределение ξ имеет вид

$$\pi_i = \mathbf{P}(\xi = i) = \begin{cases} p_x, & \text{если } i = 0, \\ q_x, & \text{если } i = b, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{P}$ – вероятность, x – возраст застрахованного, а вероятности p_x и $q_x = 1 - p_x$ означают вероятность того, что человек в возрасте x лет проживет еще по меньшей мере один год или умрет в течение ближайшего года соответственно.

В этом месте остановимся, ибо сталкиваемся с величинами, которые принципиально отражают структуру исходной информации. Откуда берутся вероятности того, что человек в заданном возрасте умрет или останется жить в течение года? Естественно, из анализа информации о возрасте наступления смерти в достаточно представительной выборке и на достаточно большом временнóм периоде. А вот что такое достаточно представительная выборка – это уже вопрос специальный. Статистические свойства продолжительности жизни совершенно различны у жителя высокоразвитой страны Запада и жителя бедного африканского государства. Среди жителей одной страны существуют группы людей с разными характеристиками продолжительности жизни. Они зависят от профессии, состояния здоровья в момент страхования и т.д.

Все эти данные суммируются в специальных таблицах смертности, или, в других терминах, – в таблицах продолжительности жизни. Ясно, что компания должна иметь спектр таблиц продолжительности жизни для различных групп населения. Составление таких таблиц, отслеживание динамики их изменения также было и остается одной из основных актуарных задач.

Отметим, что составление и анализ таблиц продолжительности жизни – отнюдь не простая задача. Первый правительственный актуарий Великобритании Джон Финлейсон сделался знаменитым благодаря этой деятельности. С 1812 по 1819 год он работал над утверждением фонда вдов и сирот для штатских служащих военно-морских сил Великобритании. Наиболее важным вкладом Финлейсона как актуария в общественную жизнь того времени является его работа по таблицам смертности (англичане употребляют только такую терминологию) для правительственных пожизненных рент. В 1819 году он указал на то, что существующие таблицы правительственных пожизненных рент были ошибочно описаны на завышенных данных о смертности, что способствовало получению дополнительной прибыли по страхованию жизни, но было вредно по отношению к продаже рент. Иными словами, Н.В. Гоголь в “Мертвых душах” описывал не только российскую действительность. Отличие состояло в том, что Финлейсон был актуарий и в этом качестве он провел актуарное исследование. Он провел детальные исследования по смертности людей, получающих ренту, и создал новые таблицы для ренты. Для этой цели он осуществил более глубокое исследование уровня смертности, основанное на записях с 1695 по 1789 год, и, кроме того, информацию относительно самих лиц, получающих ренту. Все это требовало огромного труда при отсутствии механических счетных приспособлений.

Введем новую случайную величину $\varepsilon = p - \xi$, которая описывает “доход” компании от заключенного договора страхования. С вероятностью p_x компания имеет доход p рублей, а с вероятностью q_x терпит убыток, равный $b - p$ рублей.

Средний доход компании равен $\mathbf{E}\varepsilon = p - \mathbf{E}\xi = p - q_x$ (где $\mathbf{E}$ означает математическое ожидание). Эта формула позволяет сделать простейшие выводы о величине страховой премии. Ясно, что средний доход компании должен быть неотрицателен, то есть $p \geq bq_x$. Минимально возможное значение p равно $p_0 = bq_x$. Оно соответствует нулевой средней прибыли компании и называется *нетто-премией*. На самом деле реальная плата за страховку должна быть больше нетто-премии, с тем чтобы гарантировать малую вероятность разорения компании.

Для страховой компании интерес представляет общая сумма выплат всем застрахованным. Если эта сумма S меньше или равна капиталу компании u, $S \leq u$, то компания успешно выполнит свои обязательства. Если же $S > u$, то компания не сможет оплатить все иски; в этом случае мы говорим о разорении компании. Таким образом, вероятность разорения компании – это $\mathbf{P}(S > u)$. Соответственно функция распределения суммарного риска $\mathbf{P}(S \leq u)$ – это вероятность неразорения. Расчет этих вероятностей представляет фундаментальный интерес для компании и служит основой для принятия важнейших решений.

Очевидно,

$$S = \sum_{i=1}^{N} \xi_i, \qquad (2)$$

$$R = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i > u\right), \qquad (3)$$

где N – общее число застрахованных, а ξ_1 – индивидуальный иск от i-го человека. Мы предположили, что число N неслучайно (достаточно сильное сужение ситуации), а случайные величины $\xi_1, ..., \xi_N$ независимы. Поскольку суммарный риск представляет собой сумму независимых случайных величин, его распределение может быть подсчитано с помощью классических теорем и методов теории вероятностей.

Обычно число застрахованных в страховой компании очень велико. Собственно, это является одним из определяющих факторов для компании, и на страховом рынке идет достаточно жесткая конкурентная борьба за вкладчиков. Расчет вероятности разорения предполагает расчет функции распределения суммы большого числа слагаемых. В этом случае применение ЭВМ может привести к проблемам, связанным с малостью вероятностей. Однако обстоятельство, затрудняющее точный расчет, открывает возможность быстрого и простого приближенного расчета. Это связано с тем, что при росте N величина $\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i \leq x\right)$ часто имеет определенный предел, который можно принять в качестве приближенного значения искомой вероятности. Мы рассмотрим два вида приближений для вероятности разорения: приближение Пуассона и нормальное (гауссовское) приближение.

Приближение Пуассона основано на следующей теореме:

Предположим, что индивидуальные иски ξ_i независимы и принимают только значения 0 *и* 1 *с вероятностями p и q соответственно. Допустим, что $N \longrightarrow \infty$, $q \longrightarrow 0$, но Nq имеет конечный положительный предел*

$$Nq \longrightarrow \lambda. \qquad (4)$$

Тогда

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i = k\right) \longrightarrow \frac{\lambda}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, ... \qquad (5)$$

Как распределение Пуассона, так и различные его характеристики рассчитаны для многих значений параметров, и полученные данные опубликованы в виде таблиц. Для приложений к страхованию особенно важны квантили. *Квантиль уровня a* – это наименьшее число x_a такое, что $\mathbf{P}(\eta \leq x_a) \geq a$.

Рассмотрим пример. Пусть компания выплачивает сумму $b = 1$ в случае смерти застрахованного в течение года и не платит ничего, если этот человек доживет до конца года. Предположим, что на этих условиях в компании застраховано 3000 человек в возрасте $x = 38$ лет. Из некоторых таблиц смертности следует $q_{38} = 0{,}002984$ (из каждых 1000 человек, доживших до 38 лет, до 39 доживает примерно на 3 человека меньше). Тогда $Nq \approx 9$.

Зададимся каким-то уровнем, в пределах которого мы допускаем возможность разорения. Пусть этот уровень 5%, то есть мы хотим, чтобы вероятность разорения была не больше 5%. В соответствующих таблицах распределения Пуассона мы находим строчку, соответствующую $\lambda = 14$ и $\mathbf{P}(\eta \le x_{95\%})$. Получаем $x_{95\%} = 14$. Это означает, что плата за страховку для каждого застрахованного должна быть $14/N \approx 0{,}0047$ (от величины страхового пособия). Если страховое пособие $b = 250000$ рублей, то реальная плата за страховку составляет $p = bx_{95\%}/N \approx \approx 1167$ рублей. Нетто-премия, как следует из сказанного выше, равна $p_0 = \mathbf{E}\xi = bq_{38} = 750$ рублей.

Разность $p - p_0$ называется *страховой надбавкой*, или *надбавкой за безопасность*, а $(p - p_0)/p_0$ называется *относительной страховой надбавкой*, или *относительной надбавкой за безопасность* и обозначается θ.

В нашем примере $\theta = 55{,}6\%$. Страховая надбавка обеспечивает защиту компании от разорения по причине случайных флуктуаций индивидуальных рисков вокруг их среднего значения p_0.

Общая формула для платы за страховку, таким образом, имеет вид

$$p = (1 + \theta)p_0. \tag{6}$$

Другим приближением, которое является значительно более общим, является приближение Гаусса. Гауссово приближение основано на центральной предельной теореме, в простейшей формулировке утверждающей следующее:

если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ независимы и одинаково распределены со средним a и дисперсией σ^2, то при $N \longrightarrow \infty$ функция распределения центрированной и нормированной суммы

$$S_N = \frac{\sum_{i=1}^{N} \xi_i - na}{\sigma(n)^{0,5}} = \frac{S_N - \mathbf{E}S_N}{(\mathrm{Var}S_N)^{0,5}}$$

имеет предел, равный

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{0,5}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt. \tag{7}$$

Если число слагаемых велико (обычно достаточно, чтобы N имело порядок несколько десятков), а слагаемые не очень малы, то применимо гауссово приближение для

$$\mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}S}{(\mathrm{Var}S)^{0,5}} < x\right). \tag{8}$$

Вернемся к примеру. Используя известные в теории вероятностей формулы для математического ожидания и дисперсии, получим

$$\mathbf{E}S_N = N\mathbf{E}\xi = 3000 \cdot 0{,}003 = 9,$$

$$\mathrm{Var}S_N = N\mathrm{Var}\xi = 3000 \cdot 0{,}003 \cdot 0{,}997 \approx 9,$$

$$\mathbf{P}(S_N \le u) = \mathbf{P}\left(\frac{S_N - \mathbf{E}S_N}{(\mathrm{Var}S_N)^{0,5}} \le \frac{u - \mathbf{E}S_N}{(\mathrm{Var}S_N)^{0,5}}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\frac{S_N - \mathbf{E}S_N}{(\mathrm{Var}S_N)^{0,5}} \le \frac{u - 9}{3}\right) \approx \Phi\left(\frac{u - 9}{3}\right),$$

где Φ определено формулой (7).

Если мы хотим, чтобы вероятность разорения была не более 5%, величина $(u - 9)/3$ должна быть равной $x_{95\%} = 1{,}645$ (из таблиц), то есть $u = 3 \cdot 1{,}645 + + 9 = 13{,}935$. Соответственно, плата за одну страховку должна быть $p = u/N \approx 0{,}004645$, то есть в абсолютных величинах около 1161 рублей. Сравнивая эту сумму с суммой, полученной с помощью пуассоновского приближения (1167 рублей), мы видим, что различие незначительно ($\approx 0{,}5\%$).

Однако гауссово приближение удобно тем, что позволяет получить для премии p аналитическую формулу, в которую явно входит нетто-премия. Например, если в компании застраховано N человек и для каждого из них иск имеет одно и то же среднее a (которое мы принимаем в качестве нетто-премии p_0) и дисперсию σ^2, то вероятность неразорения дается формулой

$$\mathbf{P}(S_N \le N_p) = \mathbf{P}\left(\frac{S_N - Na}{\sigma(N)^{0,5}} \le \frac{Np - Na}{\sigma(N)^{0,5}}\right) \approx \Phi\left((N)^{0,5}\frac{p - p_0}{\sigma}\right).$$

Если мы хотим, чтобы вероятность неразорения компании была в пределах a, то

$$x_a = (N)^{0,5}\frac{p - p_0}{\sigma} \quad \text{или} \quad p = p_0 + \frac{\sigma x_a}{(N)^{0,5}}.$$

Соответственно относительная страховая надбавка

$$\theta = \frac{\sigma x_a}{p_0(N)^{0,5}}. \tag{9}$$

Столь подробный анализ конкретной задачи мы провели для того, чтобы хотя бы в малой степени показать, с какими проблемами сталкиваются математики, занимающиеся анализом страхования. Главный вопрос: как связаны между собой сумма, которую платит индивидуум, и сумма, которая возвращается ему в страховом случае? Чем рискует индивидуум и чем рискует компания, занимающаяся страхованием? И как сделать это риск разумным?

При этом еще есть орган, который стоит над компаниями. В разных странах эта структура называется по-разному. Например, в Великобритании это служба называется Службой Правительственного Актуария [1]. Одна из главных задач этой службы – выбор системы требований и условий, которым должна удовлетворять страховая компания с точки зрения минимизации вероятности ее разорения, в первую очередь по причине ее ответственности перед вкладчиками. В момент разорения МММ в нашей печати активно обсуждался вопрос, несет или нет какую-нибудь ответственность государство перед вкладчиками. Причем общественное мнение было отнюдь не на стороне вкладчиков: сами виноваты, поверили жуликам. Это абсолютно неправильная позиция. Государственные структуры, выдающие компаниям лицензии на право работы с ценными бумагами, должны выработать некоторую систему требований, а компания должна этим требованиям удовлетворять. Это нормальная актуарная работа. И если компания разорится, еще один актуарий (эксперт) должен дать ответ на вопрос, обоснованно или нет была выдана лицензия. И если нет, то ответственность перед вкладчиком несет не только компания, но и структура, выдавшая лицензию.

В заключение вернемся к эпиграфу настоящей работы. В отечественном жаргоне есть аналог этой пословицы: "Кто не рискует, тот не пьет шампанское". Хорошее шампанское дорого, поэтому рисковать надо умело.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дэйкин К.* Введение в актуарную профессию. Кемерово: Кузбассвузиздат, 1994.
2. *Ширяев А.Н.* // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1994. Т. 1. С. 684.
3. *Ширяев А.Н.* // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1994. Т. 1. С. 780.
4. *Panjer H.*, *Willmot G.* Insurance Risk Models. Schaumberg IL: Society of Actuaries, 1992.
5. *Фалин Г.И.*, *Фалин А.И.* Введение в актуарную математику. М.: Финансово-актуарный центр МГУ им. М.В. Ломоносова, 1994.

* * *

Семен Израилевич Спивак, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования БашГУ. Область научных интересов: обратные задачи математической химии, математическое моделирование кинетики и термодинамики сложных химических реакций, финансовая математика. Автор 230 научных работ и одной монографии.