

THE MATHEMATICAL
PROBLEMS
OF FRACTURE
MECHANICS

N. F. MOROZOV

The problems of high and superhigh rate loading are discussed. A new criterion of fracture is proposed and a method of calculation of the necessary parameters is presented. The results are used for solving two applied problems, erosion and disintegration. The phenomenon of loss of resistance of a medium is explained. The existence of fracture solitons theorem is proved.

Рассматриваются проблемы быстрого и сверхбыстрого нагружения. Вводится новый критерий разрушения и предлагается метод для определения необходимых параметров. Результаты прилагаются к решению прикладных проблем: эрозии и дезинтеграции. В заключение делается попытка объяснить феномен аномальной потери сопротивления среды. Доказывается существование солитона разрушения.

© Морозов Н.Ф., 1996

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

Н. Ф. МОРОЗОВ

Санкт-Петербургский государственный университет

ВВЕДЕНИЕ

Корни науки о прочности теряются в глубине веков. Висячие сады в древнем Вавилоне, пирамида Хеопса, величественные сооружения античной Греции и Рима свидетельствуют, что неизвестные нам специалисты знали секреты науки о прочности. Во времена средневековья Галилео Галилей был первым, кто обратил внимание на дефекты как на первопричины разрушения. Однако ученые более позднего времени – Кулон, Мариотт, Мор и другие – рассматривали разрушение как спонтанный акт, не анализируя вопросы структуры, и по существу следующий шаг был сделан только в 1920 году в работах А. Гриффитса, когда он [1] ввел понятие поверхностной энергии разрушения Π , пропорциональной площади вновь образовавшихся поверхностей, и решал вопрос о распространении трещины, составляя уравнения энергетического баланса¹

$$\Delta U + \Delta \Pi = \Delta A. \quad (1)$$

Здесь ΔU – разность упругих энергий в первом и втором положениях (рис. 1), ΔA – дополнительная работа внешних сил при переходе из первого положения во второе, $\Delta \Pi = 2\gamma\epsilon$, γ – удельная поверхностная энергия; в случае трещины $\Delta U \sim \epsilon$ и $\Delta A \sim \epsilon$. Подставляя найденные ΔA , ΔU и $\Delta \Pi$ в соотношение (1), получаем критическое значение внешней нагрузки p . В 1957 году Дж. Ирвин [2] воспользовался асимптотическими формулами Снеддона для напряжений в окрестности вершины трещины

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{r}} f_{ij}(\theta), \quad (2)$$

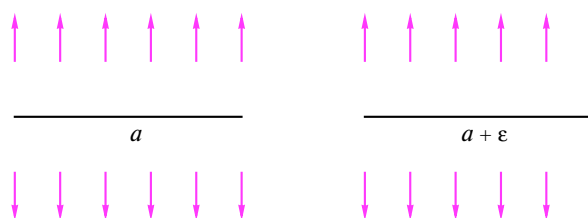


Рис. 1. Сравнение двух трещин длины a и длины $a + \epsilon$.

¹ Здесь и дальше для простоты будем рассматривать только модельные задачи.

подсчитал ΔA и ΔU и в силу соотношения Гриффитса (1) получил простое и наглядное условие нераспространения трещины

$$K < K_c. \quad (3)$$

I. НОВЫЕ ПОДХОДЫ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

Теория Гриффитса–Ирвина является в настоящее время основой для всех расчетов на трещиностойкость в инженерном деле. Существенно, что K_c является постоянной, присущей данному материалу, его параметром, как модуль Юнга, коэффициент Пуассона, теплоемкость и т.д. Однако в последние 20–30 лет более углубленные и изощренные эксперименты обнаружили определенные условия, в которых теория Гриффитса–Ирвина “работает” неудовлетворительно. В статике это прежде всего образцы и конструкции с угловыми вырезами. Рассмотрим (рис. 2) две следующие ситуации: пластина с прямолинейным разрезом и пластина с вырезом в виде лунки, близкой к разрезу. Расчеты по Снеддону дают следующие выражения:

$$\sigma_{ij} = \frac{C_{ij}^{(1)}}{r^{\lambda_1}} f_{ij(1)}^I(\theta) + \frac{C_{ij}^{(2)}}{r^{\lambda_2}} f_{ij(2)}^I(\theta), \quad \lambda_1 = \lambda_2, \quad (I)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{C_{ij}^{(1)}}{r^{\lambda_1}} f_{ij(1)}^{II}(\theta) + \frac{C_{ij}^{(2)}}{r^{\lambda_2}} f_{ij(2)}^{II}(\theta), \quad \lambda_1^{II} < \lambda_2^{II}, \quad (II)$$

а анализ по Гриффитсу–Ирвину демонстрирует существенное расхождение ситуаций (I) и (II), что противоречит здравому смыслу.

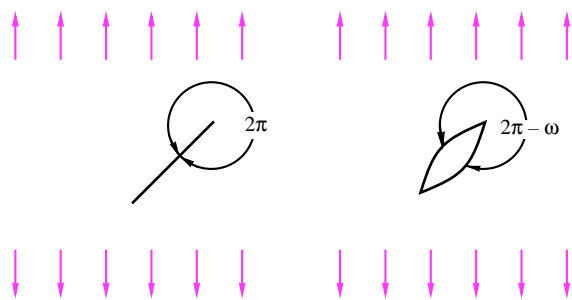


Рис. 2. Сравнение трещины и тонкой лунки.

Теоретическое обоснование ситуации с угловым вырезом проведено в работах В.Г. Мазыи, С.А. Назарова и автора этих строк [3]. Авторами показано (1989 год), что в случае углового выреза $2\pi - \alpha$, сравнивая две ситуации (см. рис. 1), получаем $\Delta P \sim \epsilon$, но

$$\Delta(A - U) \sim \epsilon^{\frac{2\pi}{2\pi - \alpha}},$$

и, следовательно, метод Гриффитса–Ирвина получения критической нагрузки не “работает”. Еще

большие трудности при применении теории Гриффитса–Ирвина возникают в задачах о динамическом быстром и сверхбыстром нагружении. Большинство ученых – экспериментаторов и теоретиков – надеялись, что при динамическом нагружении можно будет пользоваться критерием типа

$$K(t) < K_d,$$

где K_d – так же как K_c , параметр материала. Однако эти надежды не осуществились. Приведем несколько разъясняющих примеров.

1. Прежде всего рассмотрим мысленный эксперимент Г.П. Черепанова (1974 год) [4]. Анализируется полубесконечная трещина, к берегам которой внезапно приложена нагрузка p , действующая в течение времени T . Коэффициент интенсивности K этой задачи легко вычисляется [4]:

$$K(t) = \frac{4pc_2}{c_1\sqrt{\pi c_1}} \sqrt{c_1^2 - c_2^2} \operatorname{Re}(\sqrt{t} - \sqrt{t-T}).$$

Отсюда видно, что, выбрав $pT \rightarrow Q$, а $T \rightarrow 0$, получим $K(t) \sim Q/\sqrt{t}$, и коэффициент интенсивности становится как угодно большой величиной при произвольно малом импульсе Q .

2. Приведем основополагающие опыты Рави-Чандара и Кнаусса [5] из Калифорнийского технологического института (1984 год). Взяв пластину из Гомалита-100, экспериментаторы нагружали берега трещины и фиксировали нагрузку. В момент старта трещины t^* измеряли коэффициент интенсивности K_d (рис. 3). Верхняя кривая на рис. 3 убедительно демонстрирует, что K_d не есть постоянная материала, какой является K_c , и лишь при большом времени до разрушения выходит на статическую асимптоту K_c .

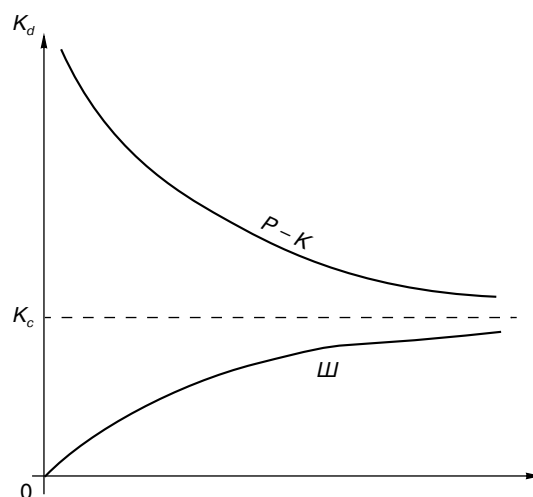


Рис. 3. График экспериментов по динамическому разрушению.

3. Существенными для понимания процесса динамического разрушения явились опыты Шоки и др. (Стенфорд, 1986 год) [6] по определению функции минимальной амплитуды: нагрузку на трещину держали фиксированное время T , постепенно повышая уровень (амплитуду) нагружения. Определяли минимальное пороговое значение амплитуды, при которой впервые при заданном времени происходит разрушение. Затем время нагружения меняли. В результате получили функцию $p = p_{\min}(T)$, характеризующую процесс разрушения. Если измерять коэффициент интенсивности напряжений в момент разрушения, то получим нижнюю кривую на рис. 3.

4. В качестве заключительного примера укажем опыты Н.А. Златина, Г.С. Пугачева и др. [7] (Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Академии наук СССР, Ленинград, 1974 год). Разрушение происходит с задержкой Δt после максимального уровня напряжения, что также входит в противоречие с традиционными представлениями о критериях разрушения.

Приведенные примеры, а число их можно существенно увеличить, демонстрируют необходимость новых подходов к проблеме хрупкого динамического разрушения.

В 1988 году Ю.В. Петров, А.А. Уткин и автор этих строк [8] предложили новый феноменологический критерий разрушения

$$\max_t \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_I(r, t') dr dt' \leq \sigma_c. \quad (4)$$

Если в какой-то момент t равенство выполняется, то разрушение может иметь место. Здесь σ_I – главное напряжение, σ_c – прочность на разрыв бездефектного образца из данного материала, d – параметр длины, τ – параметр времени.

Предлагаемый критерий является естественным обобщением статического критерия Нейбера–Новожилова

$$\frac{1}{d} \int_0^d \sigma_I(r) dr \leq \sigma_c$$

и критерия критического импульса Никифоровского–Шемякина

$$\int_0^t \sigma_I(t') dt' \leq J_c.$$

Очевидно, основная трудность применения критерия в правильном выборе параметров d и τ . Нами предложено вычислять d по формуле

$$d = \frac{2K_c^1}{\pi \sigma_c^2}. \quad (5)$$

В силу этого выбора предложенный критерий для простых задач статики дает критические значения

внешних нагрузок, совпадающие с критическими значениями по теории Гриффитса–Ирвина. Выбор τ осуществляется по-разному для бездефектного материала и для задач с трещинами. Для бездефектного материала мы считаем τ по формуле

$$\tau = \frac{d}{c},$$

где c – максимальная скорость распространения упругих волн. Так, выбранное τ хорошо согласуется с результатами экспериментов по отколу Р.Б. Броберга (Ирландия) [9], а также Златина и Пугачева (Россия) [7].

В окрестности вершины трещины выбор τ осуществляется по другому принципу. Кальтхофф, Д. Шоки и др. установили экспериментально, что разрушение может иметь место, если текущий коэффициент интенсивности не превышает некоторого критического значения K_d^* в течение некоторого промежутка времени – инкубационного времени t_{inc} , являющегося параметром данного материала. Они опубликовали в виде таблиц результаты экспериментов по определению t_{inc} для основных материалов.

Следует обратить внимание, что указанные эксперименты достаточно трудоемки и сложны. Я предлагаю следующую альтернативную процедуру. Над серией стандартных образцов из выбранного материала проводим эксперименты по определению¹

$$p = p_{\min}(T). \quad (6)$$

Затем в силу критерия (4) рассчитываем эту же функцию p , она будет зависеть еще и от параметра τ :

$$p = p_{\min}(T, \tau). \quad (7)$$

Выбираем τ из условия максимальной близости кривых (6) и (7). Можно доказать (см. [10]), что найденное так τ удовлетворяет всем условиям для t_{inc} , то есть

$$\tau = t_{\text{inc}}.$$

Резюмируя, можно сформулировать следующие положения:

- 1) поведение материалов и конструкций в условиях быстрого и сверхбыстрого нагружения не может быть предсказано на основе простой экстраполяции результатов статических испытаний;
- 2) необходимо проводить специальное тестирование материалов на быстрое нагружение;

¹ Заметим, что основной проблемой при проведении экспериментов является создание в пределах микросекундных промежутков времени очень высоких уровней напряжения. Эта проблема была решена в Санкт-Петербургском техническом университете, где под руководством Г.А. Шнеерсона разработан и сконструирован электромагнитный прибор, обеспечивающий получение на берегах трещин уровня напряжений порядка 300 МПа за 3 – 4 мкс. Это позволяет проводить эксперименты для определения p_{\min} не только с материалами типа оргстекла, но и с металлами.

3) в качестве определяющих параметров предлагаются σ_c , d , τ или в силу (5) σ_c , K_c , $\tau = t_{inc}$, причем σ_c и K_c – традиционные параметры, а τ следует определять либо по Калытхоффу, либо по нашей методике.

II. ПРИМЕНЕНИЕ НОВЫХ КРИТЕРИЕВ РАЗРУШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ЭРОЗИИ

Проблемы эрозионного разрушения являются актуальными как для промышленности (защита летательных и космических аппаратов), так и для глобальных вопросов мироздания (лунные кратеры и т.д.). Проводимые эксперименты позволили определить описанную ниже типичную схему эрозионного разрушения. Схематизируем задачу следующим образом: на упругое полупространство падает абсолютно твердая частица – шарик заданного радиуса R . Утверждается:

- 1) при скорости V соударения меньше V_{lcr} шарик отскакивает без разрушения среды,
- 2) при $V > V_{lcr}$ в среде наблюдается хрупкое разрушение,
- 3) при $V > V_{lcr}$ пластическое разрушение.

Сравним результаты экспериментов Ю.В. Полежаева [11] и Л.И. Урбановича [12] с расчетами, основанными на критерии (4). Воспользуемся теорией удара Герца в изложении [13] (рис. 4).

Записываем уравнение движения частицы-шарика:

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = -P(t), \quad (8)$$

где

$$P(t) = K(R)h^{3/2}(t), \quad K(R) = \frac{4}{3} \sqrt{R} \frac{E}{1-\nu^2}. \quad (9)$$

Очевидно, что в момент встречи $dh/dt = V$, а максимальное внедрение h_0 имеет место при $dh/dt = 0$.

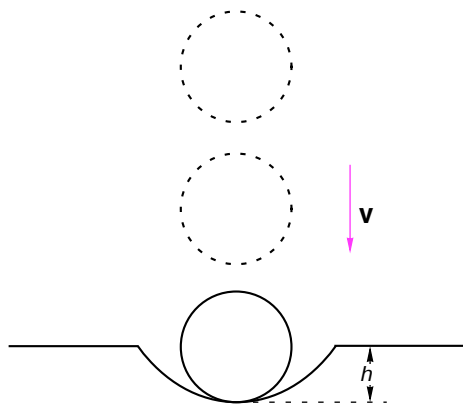


Рис. 4. Схема внедрения шаровой частицы в упругую среду.

Решая уравнение (8), получаем

$$h_0(V, R) = \left(\frac{5mV^2}{4K} \right)^{2/5}, \quad (10)$$

$$t_0(V, R) = \frac{2h_0}{V} \int_0^1 \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^{5/2}}} = 2,94 \frac{h_0}{V},$$

где t_0 – полное время контакта. Следуя [13], предполагаем

$$h(t) = h_0 \sin \frac{\pi t}{t_0}; \quad (11)$$

подсчитываем в силу [14] максимальное растягивающее напряжение

$$\sigma_{zz}(t, V, R) = \frac{1-2\nu}{2} \frac{P(t, V, R)}{\pi a^2(t, V, R)},$$

$$a(t, V, R) = \left[3P(t, V, R)(1-\nu^2) \frac{R}{4E} \right]^{1/3}. \quad (12)$$

Если пороговая скорость V_1 , то в силу критерия (4) в случае известного τ значение V_1 может быть найдено как минимальный положительный корень уравнения

$$\max_{t-\tau} \int \sigma(S, V, R) dS - \sigma_c \tau = 0. \quad (13)$$

Обратно, если мы знаем V_1 , то можем из (13) определить τ .

Урбанович [12] при исследовании бомбардировки алюминиевого сплава В-95 ($E = 73$ ГПа, $\nu = 0,3$; $\sigma_c = 460$ МПа, $R = 150$ мкм) определил первую критическую скорость $V_1 = 33$ м/с, затем, учтя (13), вычислил τ , оказавшееся равным 0,5 мкс.

Аналогичное значение для t_{inc} было получено нами для данного сплава при анализе экспериментов Златина–Пугачева [7], и, наконец, простые предварительные вычисления по нашей теории дали значения

$$\sigma_c = 460 \text{ МПа}, \quad K_{lc} = 37 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}, \quad c = 6500 \text{ м/с},$$

$$\tau = \frac{d}{c} = \frac{2K_{lc}^2}{\pi\sigma_c^2 c} \approx 0,6 \text{ мкс},$$

что является достаточно удовлетворительным результатом с двойной проверкой.

III. ПРОБЛЕМЫ ДЕЗИНТЕГРАЦИИ

Одной из чрезвычайных опасностей, которые подстерегают человечество, является опасность столкновения Земли с каким-либо внеземным объектом: кометой, большим метеоритом и т.д. В июне 1994 года комета Шумейкеров–Леви столкнулась с одной из планет Солнечной системы, но теоретически

возможно столкновение небесных тел с Землей, поэтому необходимо:

- 1) уметь вычислить траекторию объекта,
- 2) создать оружие уничтожения,
- 3) дезинтегрировать объект оптимальным образом.

Опыт космических стыковок вселяет оптимизм в вопрос о расчете траекторий, и, по-видимому, решение проблемы будет зависеть от быстродействия вычислительных машин.

Вторая задача еще ждет решения, но определенные идеи обсуждаются; в свое время А.Д. Сахаров предложил использовать для этой цели ядерное оружие и продумывал систему защиты Земли от последствий ядерного удара. Теоретические и практические аспекты этой проблемы были обсуждены на нескольких международных конференциях.

К нашей тематике относится третья задача. На основании критерия (4) мы можем рассчитать задачу о дезинтеграции упругохрупкого шара при постоянном внешнем нормальном давлении p , внезапно снимаемом. Помимо предположения о справедливости критерия (4), принимаются следующие постулаты:

- 1) если критерий выполняется для $r = r_0$, $t = t_0$, мы предполагаем, что разрушается слой $r_0 - d/2 < r < r_0 + d/2$,
- 2) мы имеем новый шар $0 < r < r_0 - d/2$ и сферический слой $r_0 + d/2 < r < R$, в которых процесс разрушения продолжается,
- 3) окончанием процесса разрушения можно считать ситуацию, когда зоны разрушения покрывают весь шар, однако мы можем рассчитать остаток процесса априори.

IV. ФЕНОМЕН ПОТЕРИ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

В последние годы ученых, занимающихся прочностью, помимо магистральных задач о надежности конструкций, интересуют также такие экзотические проблемы, как сверхпластичность, сверхпроводимость, память формы и др.

Одной из таких проблем является феномен потери сопротивления среды. Суть его такова. В 80-е годы московские ученые К.И. Козорезов и Г.Г. Черный при проведении экспериментов по бомбардировке среды частицами обнаружили, что большинство частиц отскакивает от преграды, часть застревает в районе пограничного слоя, но существуют единичные экземпляры, которые проникают в слой на глубину порядка тысячи своих диаметров [15].

Можно дать такую трактовку обнаруженному явлению [16]. Будем рассматривать упругую плоскость с трещиной. Применим для описания ситуации более простую гибридную модель Р. Томсона [17] (рис. 5). Упругая плоскость заменяется двумя

обладающими изгибной жесткостью стрингерами (упругими полосами) с насаженными на них материальными точками, которые, в свою очередь, связаны соответствующими вертикальными пружинами. Пружины могут рваться и “залечиваться” в соответствии с законом, показанным на рис. 6.

Потенциал энергии такой системы имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \gamma \sum (y_{i+1} - y_i)^2 + \sum \Phi(y_i) \right\}, \quad (14)$$

где y_i – ординаты i -й материальной точки, а Φ в силу вышеуказанного закона определяется по правилу

$$\Phi(r) = \begin{cases} \beta r^2, & r \leq u_0, \\ \beta u_0^2, & r > u_0. \end{cases} \quad (15)$$

Тогда уравнения движения системы таковы:

$$\gamma(y_{j+2} - 4y_{j+1} + 6y_j - 4y_{j-1} + y_{j-2}) + \rho_j \beta y_j + m \ddot{y}_j = 0. \quad (16)$$

Здесь $\rho_j = 0$, если пружинка порвана, и $\rho_j = 1$ в противоположном случае.

Будем идентифицировать трещины с последовательным набором порванных пружин. Математически задача ставится следующим образом: доказать при определенном подборе параметров $\{\beta, \gamma, l, V\}$ существование трещины длины l , движущейся с постоянной скоростью V . Сказанное эквивалентно условию

$$\rho_j = \begin{cases} 1, & j - Vt > l, \quad j - Vt < -l, \\ 0, & -l < j - Vt < l, \end{cases}$$

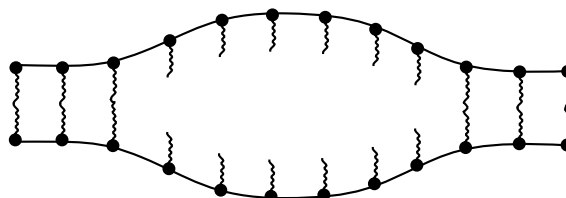


Рис. 5. Гибридная модель Р. Томсона.

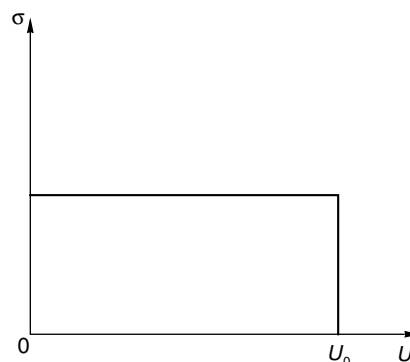


Рис. 6. График зависимости силы взаимодействия между точками от растяжения пружины.

а искомое стационарное решение

$$y(\tau + 2) - 4y(\tau + 1) + \left(6 + V^2 \frac{m}{\gamma} \frac{d^2}{d\tau^2}\right)y(\tau) - 4y(\tau - 1) - y(\tau - 2) + \rho(\tau) \frac{\beta}{\gamma} y(\tau) = 0.$$

Удовлетворяя условиям гладкости

$$y(\pm l - 0) = y(\pm l + 0), \quad y'(\pm l - 0) = y'(\pm l + 0)$$

и применяя преобразование Фурье, сводим нахождение $y(\tau)$ к проблеме собственных функций для одномерного интегрального уравнения

$$y(\tau) = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau\omega} \left(16 \sin^4 \frac{\omega}{2} - V^2 \omega^2 \frac{m}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\right)^{-1} \int_{-l}^l e^{i\omega\tau} y(\tau) d\tau d\omega.$$

Можно доказать [16], что при определенных условиях, которым удовлетворяют параметры (β, γ, l, V) , существует собственная функция, которую можно трактовать как солитон разрушения — некую ячейку, перемещающуюся в среде со скоростью V . Попаданием частицы в такую ячейку можно объяснить феномен сверхглубокого проникновения частиц в среду. Любопытно, что полученный на основе строгих рассуждений результат ассоциируется с фантастическими романами типа Жюль Верна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Завершая статью, хотел бы привлечь внимание молодежи и прежде всего выпускников школ к такой замечательной науке, как механика, и особенно механика сплошной среды. Использование классического и современного математического аппарата, строгие логические выводы и рассуждения, с одной стороны, и в то же время реальные объекты и явления природы, которые стоят за математическими формулами, с другой, позволяют обнаружить и исследовать многочисленные тайны природы, прикоснуться к неизведанному, реально познать и использовать то, что еще недавно казалось чудом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Griffith A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser A. 1921. V. 221. P. 163 – 198.
2. Irwin G. Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate // J. Appl. Mech. 1957. № 3. P. 361 – 364.

3. Maz'ya V.G., Morozov N.F., Nazarov S.A. On the Elastic Strain Energy Release due to the Variation of the Domain near the Angular Stress Concentrator. Linkoping University. S-581. Linkoping, Sweden, 1983. P. 35.

4. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.

5. Ravi-Chandar K., Knauss W.G. An Experimental Investigation into Dynamic Fracture // Int. J. Fracture. 1984. V. 25. P. 247 – 262.

6. Shockey D.A. et al. Short Pulse Fracture Mechanics // J. Eng. Fract. Mech. 1986. V. 23. P. 311 – 319.

7. Златин Н.А., Пугачев Г.С. и др. Временная зависимость прочности металлов // Изв. АН СССР. Физика твердого тела. 1975. Т. 17. № 9. С. 2599 – 2602.

8. Морозов Н.Ф., Петров Ю.В., Уткин А.А. О разрушении у вершины трещины // Физико-химическая механика материалов. 1988. № 4. С. 75 – 77.

9. Broberg R.B. Some Aspects of Mechanism of Scabbing. In: Stress Wave Propagate Materials. New York, London: Interscience, 1960. P. 229 – 246.

10. Petrov Y.V., Morozov N.F. On the Modeling of Fracture of Brittle Solids // ASME J. Appl. Mech. 1994. V. 61. P. 710 – 712.

11. Полежаев Ю.В. Термогазодинамические испытания самолетов. М.: МАИ, 1986.

12. Урбанович Л.И. и др. Влияние механических и физических свойств материалов на критическую скорость соударения. Тез. Межд. конференции “Аналитические методы и оптимизация в жидкости и газовой динамике”. Арзамас-16, 1994. С. 121 – 123.

13. Колесников Ю.В., Морозов Е.М. Контактная механика разрушения. М.: Наука, 1989.

14. Lawn B.R., Wilshaw T.R. Indentation Fracture: Principles and Application // J. Mater. Sci. 1975. V. 10. № 6. P. 1049 – 1081.

15. Черный Г.Г. Механизм аномально низкого сопротивления // ДАН. 1987. Т. 292. № 6. С. 1324 – 1328.

16. Morozov N.F., Paukshto M.W. On the Crack Simulation // J. Appl. Mech. 1991. V. 58. P. 290 – 292.

17. Thomson R., Hsieh C. Lattice Trapping of Fracture Cracks // J. Appl. Phys. 1971. V. 42. № 8. P. 3154 – 3160.

* * *

Никита Федорович Морозов, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Российской Академии наук, зав. кафедрой теории упругости Санкт-Петербургского государственного университета. Член Национального Комитета России по теоретической и прикладной механике. Главные научные интересы связаны с математическими проблемами теории разрушения и с применением асимптотических методов к задачам теории упругости. Автор более 120 научных работ и четырех монографий.