EQUATIONS
WITH AFTEREFFECT
AND MATHEMATICAL
MODELING

V. B. KOLMANOVSKII

A number of possibilities of the usage of equations with aftereffect are discussed. Different examples of concrete models are considered. These examples explain some effects that can be described simply and adequately by taking into account the consequences of aftereffect.

Обсуждаются некоторые возможности использования уравнений с последействием при построении математических моделей явлений. Приведены примеры конкретных моделей, разъясняющие некоторые эффекты, которые могут быть довольно просто описаны за счет учета последействия.

УРАВНЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В. Б. КОЛМАНОВСКИЙ

Московский институт электроники и математики (технический университет)

ВВЕДЕНИЕ

При изучении произвольных реальных явлений невысказанный, но широко используемый принцип состоит в том, что наличие любой сколь угодно грубой модели рассматриваемого явления лучше, чем ее отсутствие, а математика применяется не непосредственно к реальному объекту, а к его математической модели. Именно поэтому решающим звеном прикладного математического исследования является правильно выбранная математическая модель, одновременно достаточно адекватная изучаемому явлению и не слишком сложная. Без математического моделирования вряд ли можно приступить даже к анализу объектов, описываемых небольшим числом переменных, в то время как многие процессы в экономике, биологии, химии, медицине, социологии и т.д. могут описываться сотнями и даже тысячами переменных.

Таким образом, построение и исследование математических моделей представляется важным для почти всех отраслей знания с учетом их специфики. Вместе с тем имеются и общие принципы построения и анализа моделей, которые можно применять при исследовании разнородных явлений, поскольку возможность индуктивных обобщений и дедуктивных предсказаний связана с необходимостью анализа взаимоотношений переменных, описывающих явление. Использование этих общих принципов приводит к некоторой последовательности шагов прикладного математического исследования. К ним относятся: во-первых, выбор содержательных гипотез и характерных (определяющих) переменных, во-вторых, исследование математической модели, связывающей эти переменные, и, в-третьих, анализ полученных результатов и сравнение их с экспериментальными данными.

Построение и исследование математических моделей сопряжено с необходимостью использования многих разделов математики, например математического анализа, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей, теории управления и оптимизации, численных и приближенных методов и многих других.

Следует подчеркнуть, что одно и то же реальное явление может быть описано неэквивалентными математическими моделями, например непрерывными или дискретными, детерминированными или стохастическими и т.д. При этом представляется, что единственный способ научить математическому моделированию состоит в том, чтобы продемонстрировать как можно большее количество явлений и моделей, описывающих их.

Неоднозначность выбора модели приводит к тому, что существенным является правильный ее выбор как с точки зрения эквивалентности описываемому явлению, так и с точки зрения простоты исследования. При этом эквивалентность означает, что модель должна учитывать лишь интересующие исследователя стороны явления, а не явление целиком. Последнее обстоятельство может быть использовано для существенного упрощения математических моделей. В результате определяющие соотношения (уравнения), которые могут иметь различную природу, также могут быть существенно упрощены.

В последнее время в прикладной математике широко распространилось использование уравнений с последействием (именуемых также функционально-дифференциальными уравнениями, дифференциально-разностными уравнениями, дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом, уравнениями с запаздыванием и т.д.).

Цель настоящей статьи – показать, по возможности на элементарных примерах, некоторые общие качественные особенности уравнений с последействием и специфику их применения при построении математических моделей и анализе конкретных систем. При этом логические построения и математические преобразования не играют доминирующей роли, поскольку она отведена существу дела.

УРАВНЕНИЕ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Уравнениями с последействием принято называть уравнения относительно неизвестной функции $x(t)$, связывающие скорость $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$ изменения функции $x(t)$ с ее значениями в текущий момент времени t и некоторый предшествующий момент времени $t - h$, где заданная постоянная $h > 0$. Примером скалярного уравнения с последействием является уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t > t_0, \qquad (1)$$

где t_0 – заданный начальный момент времени.

Подобного рода уравнения возникают всякий раз, когда моделируемое явление содержит элемент задержки, в результате действия которого и возникает зависимость скорости эволюции от предыдущих состояний.

Наличие запаздывания h приводит как к количественным, так и качественным изменениям постановок задач и свойств их решений. Прежде всего в качестве начального условия для уравнения (1) следует задавать не только значение $x(t_0)$, как это имеет место для обыкновенных дифференциальных уравнений, но и все значения искомой функции $x(t)$ на отрезке $t_0 - h \le t \le t_0$. Далее, при заданных начальных условиях уравнение (1) можно решать не в обе стороны по t (то есть для $t > t_0$ и $t < t_0$), как для обыкновенных дифференциальных уравнений, а лишь вперед по $t > t_0$. Явления, моделируемые уравнениями вида (1), существенно бесконечномерны, и потому уравнения (1) отчасти подобны уравнениям с частными производными.

Запаздывание в уравнении (1) может оказать существенное влияние на качественное поведение системы, например иметь дестабилизирующий эффект, приводить к появлению колебаний, к слипанию решений, их фокусировке и т.д. Рассмотрим, например, линейное однородное уравнение

$$\dot{x}(t) = -x(t-1), \quad t > 0. \qquad (2)$$

Обозначим: $x(t; C)$ – решение уравнения (2) при $t > 0$, определяемое постоянными начальными условиями

$$x(t; C) \equiv C, \quad -1 \le t \le 0, \qquad (3)$$

где C – произвольная постоянная. Из уравнений (2), (3) вытекает, что для любой постоянной C все решения равны 0 при $t = 1$:

$$x(1; C) = 0, \quad \forall C.$$

Эффект такого рода для линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений невозможен.

Как и обычно, наиболее эффективным при моделировании оказывается применение линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Так, например, вопрос об устойчивости процесса, моделируемого упомянутым уравнением, может быть решен на основе анализа корней соответствующего характеристического уравнения, которое, однако, оказывается трансцендентным, а не алгебраическим, как это имеет место для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Реальные явления могут моделироваться уравнениями с последействием и более сложной природы, например уравнениями, содержащими несколько дискретных запаздываний, распределенное запаздывание, случайное запаздывание или их комбинацию. Точное решение этих уравнений в виде явной аналитической формулы, даже содержащей интегралы или суммы бесконечных рядов, удается получить лишь в исключительных случаях. Поэтому существенную роль играют способы приближенного или численного построения решения, причем реализация этих способов связана с применением ЭВМ.

При построении математических моделей явлений с малым запаздыванием оно зачастую не принимается во внимание. Однако подобное пренебрежение малым запаздыванием, вообще говоря, некорректно и может привести к неправильным заключениям. Проиллюстрируем это примером, в котором скалярная система асимптотически устойчива при отсутствии запаздывания ($h = 0$), но неустойчива при любом запаздывании $h > 0$. Рассмотрим систему

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = a[\ddot{x}(t-h) + \dot{x}(t-h) + x(t-h)],$$

где постоянная $a > 1$ и постоянное запаздывание $h \geq 0$. Если $h = 0$, то система асимптотически устойчива, поскольку соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

имеет оба корня с отрицательной действительной частью. Если же $h > 0$, то характеристическое уравнение имеет вид

$$(\lambda^2 + \lambda + 1)(1 - ae^{-h\lambda}) = 0;$$

корни λ_n этого уравнения, имеющие положительные действительные части, даются формулой

$$\lambda_n = \frac{1}{h}(\ln a + 2n\pi i),$$

где i – мнимая единица, число n принимает значения $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Наличие корней характеристического уравнения с положительной действительной частью означает наличие неограниченных решений исходного уравнения, то есть неустойчивость. Таким образом, сколь угодно малое запаздывание $h > 0$ оказывает дестабилизирующее воздействие на систему, а пренебрежение им в модели приводит к порочным выводам.

УРАВНЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ, МОДЕЛИРУЮЩИЕ ИЗМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ

Одно из актуальных современных применений теории математического моделирования связано с экологией и посвящено исследованию целенаправленных воздействий на процесс взаимодействия растений и животных между собой и окружающим их миром.

Характерной особенностью экологических систем является то, что их поведение зависит от большого числа взаимосвязанных факторов, учет которых в полном объеме представляется затруднительным. В связи с этим при исследовании конкретных задач проводятся различные упрощения. Для описания упрощенных моделей используют различные типы уравнений: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с запаздыванием, уравнения в частных производных, стохастические уравнения и т.д. Отметим, что все они выводятся единообразно, для чего используется закон сохранения численности популяции (биологического вида).

В ряде этих моделей скорость изменения численности популяции представляется в виде суммы трех слагаемых, первое из которых определяется рождаемостью, второе – смертностью, третье – миграцией. Одна из первых таких моделей, предложенная Т.Р. Мальтусом в 1798 году, имеет вид

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t), \quad N(0) = N_0 > 0. \tag{4}$$

Здесь $N(t)$ – численность популяции в момент времени t, постоянная $\lambda > 0$ именуется мальтузианским коэффициентом линейного роста.

В модели Мальтуса миграция не учитывается, рождаемость и смертность пропорциональны численности, причем скорость рождаемости больше скорости смертности. В соответствии с законом Мальтуса (4) численность популяции должна расти экспоненциально, что не всегда справедливо, ибо не согласуется с реальностью. Для преодоления этого противоречия необходимо принять во внимание иные факторы и соответствующим образом модифицировать модель.

Дж. Кьютелет предположил, что должно иметь место насыщение численности популяции. На основании этого в 1836 году его ученик Ферхюльст предложил для описания численности популяции $N(t)$ использовать уравнение

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \quad t \geq 0, \quad N(0) = N_0 > 0. \tag{5}$$

Здесь постоянная K определяет численность стационарного состояния популяции. Постоянную K называют емкостью среды для данной популяции.

Решение задачи (5), полученное, например, методом разделения переменных, имеет вид

$$N(t) = \lambda N_0 e^{\lambda t}\left[\lambda + \frac{\lambda}{K}N_0(e^{\lambda t} - 1)\right], \quad t \geq 0. \tag{6}$$

Из этого выражения следует, что

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = K.$$

Значит, для модели (5) численность популяции стремится к конечному значению K. Кроме того, в силу (5) производная $\dot{N}(t) < 0$, если $N_0 < K$. Отсюда и из (6) следует асимптотическая устойчивость стационарного решения $N(t) \equiv K$ уравнения (5), а также неустойчивость нулевого положения равновесия $N(t) \equiv 0$.

По сравнению с (4) модель (5) более удовлетворительно описывает динамику изменения численности популяции. Однако и эта модель не свободна от недостатков. Один из них состоит в том, что ввиду (6) численность популяции монотонна и стремится к стационарному значению $N(t) \equiv K$, в то время как многочисленные наблюдения показывают, что обычно численност популяции колеблется около стационарного решения. Другим существенным недостатком моделей вида (5) является предположение о мгновенной реакции популяции на изменение ее численности. В действительности, однако, изменение численности популяции $N(t)$ не мгновенно сказывается на скорости $\dot{N}(t)$. Учет этого приводит к необходимости использовать уравнения с последействием. Если все эффекты последействия усредненно можно характеризовать временным запаздыванием $h > 0$, то соответствующая модель, предложенная Г.Е. Хатчинсоном в 1948 году, имеет вид

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t)\left(1 - \frac{N(t-h)}{K}\right).$$

Эта модель уже ближе к реальности. В частности, она учитывает инерцию в реакции популяции, колебательный характер стремления численности популяции к ее стационарному значению, возможность устойчивого сосуществования лишь ограниченного числа представителей данной популяции. Ясно также, что $N(t) > 0$ при $t > 0$, если $N(0) > 0$. Качественное поведение решений этой модели с запаздыванием также существенно разнообразнее и богаче по сравнению со случаем $h = 0$. В зависимости от параметров задачи при положительных возмущениях $N(t) > 0$, $-h \le t \le 0$, система обладает следующими свойствами:

1) если $\lambda h < 37/24$, то положение равновесия $N_0 = K$ асимптотически устойчиво в целом;

2) если $37/24 < \lambda h < \pi/2$, то положение равновесия N_0 асимптотически устойчиво, но не в целом;

3) если $1/e < \lambda h < \pi/2$, то все решения стремятся к решению $N(t) \equiv K$, пересекая его бесконечно много раз;

4) если $\lambda h > \pi/2$, то существует периодическое решение, не равное постоянной;

5) если $\lambda h < 1/e$, то не существует колеблющихся решений, у которых при достаточно больших t интервалы между нулями функции $N(t) - N_0$ были бы больше или равны h.

Отметим, однако, что единой моделью невозможно, вообще говоря, охватить все явление целиком, ибо стремление сделать это может привести к столь сложным и громоздким соотношениям, что эффективное извлечение надежной информации из них становится весьма проблематичным. Иными словами, модель должна учитывать лишь интересующую сторону явления. Приведем, например, модели, учитывающие возрастную неоднородность отдельных представителей популяции.

Модели популяции, в которых учитывается неоднородность возраста и миграция, описываются следующим образом. Обозначим через $N(t, \tau)$ численность части популяции в момент времени t, возраст представителей которой в этот момент t не превосходит τ. Плотность (то есть производную) функции $N(t, \tau)$ по τ обозначим через $n(t, \tau)$, то есть

$$n(t, \tau) = \frac{\partial N(t, \tau)}{\partial \tau}.$$

Тогда для функции $n(t, \tau)$ справедливо уравнение

$$\frac{\partial n(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial n(t, \tau)}{\partial \tau} = -\mu(t, \tau)n(t, \tau) + g(t, \tau). \qquad (7)$$

Здесь через $\mu(t, \tau)$ обозначен коэффициент смертности, а $g(t, \tau)$ – скорость миграции. Иными словами, за малое время Δt число умирающих представителей популяции в момент t в возрасте τ равно $\mu(t, \tau)n(t, \tau)\Delta t$, а число мигрирующих есть $g(t, \tau)\Delta t$. Знак функции g зависит от характера миграции: функция g положительна в случае иммиграции и отрицательна в случае эмиграции. Граничное условие для $n(t, 0)$ определяется числом родившихся представителей популяции в момент времени t. Оно представимо в виде

$$n(t, 0) = u(t)\int_{\tau_1}^{\tau_2} k(t, \tau)n(t, \tau)d\tau. \qquad (8)$$

Здесь τ_1 и $\tau_2 > \tau_1$ определяют границы возрастов, в пределах которых возможно воспроизводство; функция $u(t)$ характеризует скорость рождаемости; наконец, функция $k(t, \tau)$ отражает неравномерность воспроизводства в зависимости от возраста.

Наряду с граничным условием (8) для решения уравнения (7) следует задать начальное условие

$$n(0, \tau) = n_0(\tau), \quad \tau \ge 0, \qquad (9)$$

где $n_0(\tau)$ – заданная функция, определяющая распределение по возрастам в начальный момент времени $t = 0$. Пусть функция $\mu(t, \tau)$ не зависит от t, то есть $\mu(t, \tau) \equiv \mu(\tau)$, а граничное условие (8) имеет вид

$$n(t, 0) = u(t)N(t) = \varphi(t), \quad N(t) = \int_0^\infty n(t, \tau)d\tau. \qquad (10)$$

Тогда для решения задачи (7) – (10) справедливо представление

$$n(t, \tau) = \begin{cases} n_0(\tau - t)\exp\left(-\int\limits_{\tau - t}^{\tau} \mu(s)ds\right), & 0 \le t \le \tau, \\ \varphi(t - \tau)\exp\left(-\int\limits_0^{\tau}\mu(s)ds\right), & \tau \le t. \end{cases}$$

Эти выражения могут быть использованы при анализе динамики численности популяции, описываемой уравнением (7).

Другой тип неоднородности возникает тогда, когда популяция неравномерно распределена в среде обитания, вследствие чего имеет место диффузия популяции, то есть перемещение особей популяции из одной области среды обитания в другую. Для описания эволюции в этом случае рассмотрим плотность популяции $D(t, x, y)$ в момент времени t в точке с координатами (x, y). Функция $D(t, x, y)$ является решением уравнения Хатчинсона с диффузией и запаздыванием

$$\frac{\partial D(t,x,y)}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 D(t,x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D(t,x,y)}{\partial y^2}\right) + \\ + \lambda D(t,x,y)\left(1 - \frac{1}{K}D(t-h,x,y)\right),$$

где α – коэффициент диффузии.

Отметим, что последнее уравнение содержит уже четыре неизвестных параметра α, λ, K, h, подлежащих идентификации, что само по себе является непростой задачей, существенно усложняющей эффективное использование этой модели.

Эффективным способом описания различных типов неоднородностей, а также неполноты информации является моделирование их с помощью случайных величин или процессов. Пусть, например, коэффициент роста λ в уравнении (5) случаен. Тогда для описания динамики популяции вместо уравнения (5) можно использовать уравнение

$$dN(t) = (\lambda dt + \sigma d\xi(t))N(t)\left(1 - \frac{N(t-h)}{K}\right),$$

где $\xi(t)$ – стандартный винеровский процесс (именуемый также процессом броуновского движения) интенсивности σ.

Подобным же образом могут быть проанализированы математические модели взаимодействия нескольких популяций в зависимости от того, какие именно факторы этого взаимодействия принимаются во внимание. В простейшем случае двух популяций, взаимодействие которых носит характер "хищник–жертва" (то есть одна популяция служит пищей для другой), модель имеет вид (в безразмерных переменных)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)(1-y(t)), \\ \dot{y}(t) &= ay(t)(x(t)-1). \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $x(t)$ – численность жертв, $y(t)$ – численность хищников, $a > 0$ – безразмерный параметр. Система (11) иногда называется системой Лотки–Вольтерры. На плоскости (x, y) решениями системы (11) являются замкнутые траектории, содержащие внутри себя точку равновесия (1, 1). Уравнения (11) получены в предположении, что скорость изменения численности каждой популяции пропорциональна ее размеру и числу встреч с другой популяцией, что гибель жертвы приводит к немедленному увеличению числа хищников, а число жертв при отсутствии хищников неограниченно возрастает. Однако эти предположения явно нереалистичны. Более адекватную модель взаимодействия "хищник–жертва" можно получить, если ввести в рассмотрение запаздывание h, представляющее собой осредненный интервал времени между гибелью жертв и соответствующим увеличением числа хищников. Эта модель имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)(1-y(t)), \\ \dot{y}(t) &= -ay(t) + ax(t-h)y(t-h). \end{aligned}$$

Отметим, что запаздывание в задаче "хищник–жертва" впервые ввел В. Вольтерра в книге [3].

МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ

Рассмотрим движение одинаковых автомобилей в предположении, что обгон невозможен (эта ситуация имеет место на загруженных трассах). Обозначим через $x_n(t)$ положение n-го автомобиля в момент времени t. Естественное предположение относительно автомобиля $x_{n+1}(t)$, следующего перед автомобилем $x_n(t)$, состоит в том, что ускорение автомобиля

$$\ddot{x}_{n+1}(t) = \frac{d^2 x_{n+1}(t)}{dt^2}$$

пропорционально относительной скорости $\dot{x}_n(t-h) - \dot{x}_{n+1}(t-h)$ этих автомобилей друг относительно друга в некоторый предшествующий момент времени $t - h$ (где $h > 0$ – постоянная) и обратно пропорционально расстоянию между ними. Следовательно, обозначая через m массу автомобиля, а λ – коэффициент чувствительности водителя, получаем модельное уравнение движения в виде

$$m\ddot{x}_{n+1} = \frac{\lambda[\dot{x}_n(t-h) - \dot{x}_{n+1}(t-h)]}{[x_n(t-h) - x_{n+1}(t-h)]}.$$

Поскольку правая часть этого уравнения не зависит от текущего состояния, то, последовательно интегрируя его на отрезках длины h, можно определить траекторию движения.

Пример конкретного приложения предложенного подхода будет рассмотрен во второй статье, посвященной моделированию системы управления артериальным давлением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье рассмотрены некоторые примеры явлений, демонстрирующие эффективность и возможности использования для их моделирования систем с последействием. Многочисленные примеры такого рода из разных областей знания и их детальное обсуждение имеются в работах [1 – 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блехман И.И.*, *Мышкис А.Д.*, *Пановко Я.Г.* Механика и прикладная математика. М.: Наука, 1983.

2. *Kolmanovskii V.B.*, *Myshkis A.D.* Applied Theory of Functional Differential Equations. N.Y.: Kluwer Academic Publishers, 1992.

3. *Volterra V.* Theorie mathematique de la lutte pour la vie. Paris: Gauthier-Villars, 1931.

4. *Bellman R.*, *Cooke K.L.* Differential-Difference Equations. N.Y.: Academic Press, 1963. Русский перевод: Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

5. *Kolmanovskii V.B.*, *Nosov V.R.* Stability of Functional Differential Equations. N.Y.: Academic Press, 1986.

6. *Колмановский В.Б.*, *Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981.

7. *Арутюнян Н.Х.*, *Колмановский В.Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.

8. *Drozdov A.D.*, *Kolmanovskii V.B.* Stability in Viscoelasticity. N.Y.: North-Holland, 1994.

* * *

Владимир Борисович Колмановский, доктор физико-математических наук, профессор. Автор более 100 научных статей и 10 монографий.