THE ROLE OF THE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MODERN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

O. A. OLEINIK

This article describes the characteristic features of the theory of differential equations. This theory arose from applications, and it remains closely connected with its applications to natural sciences. The development of other branches of mathematics are greatly influenced by the theory of differential equations.

В статье изложены характерные особенности теории дифференциальных уравнений. Эта теория возникла из приложений и в настоящее время самым тесным образом связана с приложениями. Она оказывает большое влияние на развитие других областей математики.

РОЛЬ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ

О. А. ОЛЕЙНИК

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Теория дифференциальных уравнений является одним из самых больших разделов современной математики. Чтобы охарактеризовать ее место в современной математической науке, прежде всего необходимо подчеркнуть основные особенности теории дифференциальных уравнений, состоящей из двух обширных областей математики: теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории уравнений с частными производными.

Первая особенность – это непосредственная связь теории дифференциальных уравнений с приложениями. Характеризуя математику как метод проникновения в тайны природы, можно сказать, что основным путем применения этого метода является формирование и изучение математических моделей реального мира. Изучая какие-либо физические явления, исследователь прежде всего создает его математическую идеализацию или, другими словами, математическую модель, то есть, пренебрегая второстепенными характеристиками явления, он записывает основные законы, управляющие этим явлением, в математической форме. Очень часто эти законы можно выразить в виде дифференциальных уравнений. Такими оказываются модели различных явлений механики сплошной среды, химических реакций, электрических и магнитных явлений и др.

Исследуя полученные дифференциальные уравнения вместе с дополнительными условиями, которые, как правило, задаются в виде начальных и граничных условий, математик получает сведения о происходящем явлении, иногда может узнать его прошлое и будущее. Изучение математической модели математическими методами позволяет не только получить качественные характеристики физических явлений и рассчитать с заданной степенью точности ход реального процесса, но и дает возможность проникнуть в суть физических явлений, а иногда предсказать и новые физические эффекты. Бывает, что сама природа физического явления подсказывает и подходы, и методы математического исследования. Критерием правильности выбора математической модели является практика, сопоставление данных математического исследования с экспериментальными данными.

Для составления математической модели в виде дифференциальных уравнений нужно, как правило, знать только локальные связи и не нужна информация обо всем физическом явлении в целом. Математическая модель дает возможность изучать явление в целом, предсказать его развитие, делать количественные оценки изменений, происходящих в нем с течением времени. Напомним, что на основе анализа дифференциальных уравнений так были открыты электромагнитные волны, и только после экспериментального подтверждения Герцем фактического существования электромагнитных колебаний стало возможным рассматривать уравнения Максвелла как математическую модель реального физического явления.

Как известно, теория обыкновенных дифференциальных уравнений начала развиваться в XVII веке одновременно с возникновением дифференциального и интегрального исчисления. Можно сказать, что необходимость решать дифференциальные уравнения для нужд механики, то есть находить траектории движений, в свою очередь, явилась толчком для создания Ньютоном нового исчисления. Органическая связь физического и математического ясно проявилась в методе флюксий Ньютона. Законы Ньютона представляют собой математическую модель механического движения. Через обыкновенные дифференциальные уравнения шли приложения нового исчисления к задачам геометрии и механики; при этом удалось решить задачи, которые в течение долгого времени не поддавались решению. В небесной механике оказалось возможным не только получить и объяснить уже известные факты, но и сделать новые открытия (например, открытие Леверье в 1846 году планеты Нептун на основе анализа дифференциальных уравнений).

Обыкновенные дифференциальные уравнения возникают тогда, когда неизвестная функция зависит лишь от одной независимой переменной. Соотношение между независимой переменной, неизвестной функцией и ее производными до некоторого порядка составляет дифференциальное уравнение. В настоящее время теория обыкновенных дифференциальных уравнений представляет собой богатую, широко разветвленную теорию. Одними из основных задач этой теории являются существование у дифференциальных уравнений таких решений, которые удовлетворяют дополнительным условиям (начальные данные Коши, когда требуется определить решение, принимающее заданные значения в некоторой точке и заданные значения производных до некоторого конечного порядка, краевые условия и другие), единственность решения, его устойчивость. Под устойчивостью решения понимают малые изменения решения при малых изменениях дополнительных данных задачи и функций, определяющих само уравнение. Важными для приложений являются исследование характера решения, или, как говорят, качественного поведения решения, нахождение методов численного решения уравнений. Теория должна дать в руки инженера и физика методы экономного и быстрого вычисления решения.

Уравнения с частными производными начали изучаться значительно позже. Нужно подчеркнуть, что теория уравнений с частными производными возникла на основе конкретных физических задач, приводящих к исследованию отдельных уравнений с частными производными, которые получили название основных уравнений математической физики. Изучение математических моделей конкретных физических задач привело к созданию в середине XVIII века новой ветви анализа – уравнений математической физики, которую можно рассматривать как науку о математических моделях физических явлений.

Основы этой науки были заложены трудами Д'Аламбера (1717 – 1783), Эйлера (1707 – 1783), Бернулли (1700 – 1782), Лагранжа (1736 – 1813), Лапласа (1749 – 1827), Пуассона (1781 – 1840), Фурье (1768 – 1830) и других ученых. Интересно то, что многие из них были не только математиками, но и астрономами, механиками, физиками. Разработанные ими при исследовании конкретных задач математической физики идеи и методы оказались применимыми к изучению широких классов дифференциальных уравнений, что и послужило в конце XIX века основой для развития общей теории дифференциальных уравнений.

Важнейшими уравнениями математической физики являются: уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0,$$

уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2},$$

волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}.$$

Здесь мы предполагаем, что функция u зависит от t и трех переменных x_1, x_2, x_3. Уравнение с частными производными – это соотношение между независимыми переменными, неизвестной функцией и ее частными производными до некоторого порядка. Аналогично определяется система уравнений, когда имеется несколько неизвестных функций.

Разве не удивительным является тот факт, что такое простое по форме уравнение, как уравнение

Лапласа, содержит в себе огромное богатство замечательных свойств, имеет самые разнообразные приложения, о нем написаны многие книги, ему посвящены многие сотни статей, опубликованных в течение последних столетий, и, несмотря на это, осталось еще много трудных связанных с ним нерешенных проблем.

К изучению уравнения Лапласа приводят самые разнообразные физические задачи совершенно разной природы. Это уравнение встречается в задачах электростатики, теории потенциала, гидродинамики, теории теплопередачи и многих других разделах физики, а также в теории функций комплексного переменного и в различных областях математического анализа. Уравнение Лапласа является простейшим представителем широкого класса так называемых эллиптических уравнений.

Здесь, может быть, уместно вспомнить слова А. Пуанкаре: "Математика – это искусство давать разным вещам одно наименование". Эти слова являются выражением того, что математика изучает одним методом, с помощью математической модели, различные явления действительного мира.

Так же как и уравнение Лапласа, важное место в теории уравнений с частными производными и ее приложениях занимает уравнение теплопроводности. Это уравнение встречается в теории теплопередачи, в теории диффузии и многих других разделах физики, а также играет важную роль в теории вероятностей. Оно является наиболее простым представителем класса так называемых параболических уравнений. Некоторые свойства решений уравнения теплопроводности напоминают свойства решений уравнения Лапласа, что находится в согласии с их физическим смыслом, так как уравнение Лапласа описывает, в частности, стационарное распределение температуры. Уравнение теплопроводности было выведено и впервые исследовано в 1822 году в знаменитой работе Ж. Фурье "Аналитическая теория тепла", которая сыграла важную роль в развитии методов математической физики и теории тригонометрических рядов.

Волновое уравнение описывает различные волновые процессы, в частности распространение звуковых волн. Оно играет важную роль в акустике. Это представитель класса так называемых гиперболических уравнений.

Изучение основных уравнений математической физики дало возможность провести классификацию уравнений и систем с частными производными. И.Г. Петровским в 30-е годы были выделены и впервые изучены классы эллиптических, параболических и гиперболических систем, которые теперь носят его имя. В настоящее время это наиболее хорошо изученные классы уравнений.

Важно отметить, что для проверки правильности математической модели очень важны теоремы существования решений соответствующих дифференциальных уравнений, так как математическая модель не всегда адекватна конкретному явлению и из существования решения реальной задачи (физической, химической, биологической) не следует существование решения соответствующей математической задачи.

В настоящее время важную роль в развитии теории дифференциальных уравнений играет применение современных электронных вычислительных машин. Исследование дифференциальных уравнений часто облегчает возможность провести вычислительный эксперимент для выявления тех или иных свойств их решений, которые потом могут быть теоретически обоснованы и послужат фундаментом для дальнейших теоретических исследований.

Вычислительный эксперимент стал также мощным средством теоретических исследований в физике. Он проводится над математической моделью физического явления, но при этом по одним параметрам модели вычисляются другие параметры и делаются выводы о свойствах изучаемого физического явления. Цель вычислительного эксперимента – построение с необходимой точностью с помощью ЭВМ за возможно меньшее машинное время адекватного количественного описания изучаемого физического явления. В основе такого эксперимента очень часто лежит численное решение системы уравнений с частными производными. Отсюда происходит связь теории дифференциальных уравнений с вычислительной математикой и, в частности, с такими ее важными разделами, как метод конечных разностей, метод конечных элементов и другие.

Итак, первая черта теории дифференциальных уравнений – ее тесная связь с приложениями. Другими словами, можно сказать, что теория дифференциальных уравнений родилась из приложений. В этом своем разделе – теории дифференциальных уравнений – математика прежде всего выступает как неотъемлемая часть естествознания, на которой основывается вывод и понимание количественных и качественных закономерностей, составляющих содержание наук о природе.

Именно естествознание является для теории дифференциальных уравнений замечательным источником новых проблем, оно в значительной мере определяет направление их исследований, дает правильную ориентацию этим исследованиям. Более того, дифференциальные уравнения не могут плодотворно развиваться в отрыве от физических задач. И не только потому, что природа богаче человеческой фантазии. Развитая в последние годы теория о неразрешимости некоторых классов уравнений с частными производными показывает, что даже очень простые по форме линейные уравнения с частными производными с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами могут не иметь ни одного решения не только в обычном смысле, но также и в классах обобщенных функций, и в классах гиперфункций, и, следовательно, для них не может быть построена содержательная теория (теория обобщенных функций, обобщающая основное понятие математического анализа — понятие функции, была создана в середине нашего века трудами С.Л. Соболева и Л. Шварца).

Изучение уравнений с частными производными в общем случае — столь сложная задача, что если кто-нибудь наугад напишет какое-нибудь даже линейное дифференциальное уравнение с частными производными, то с большой вероятностью ни один математик не сможет о нем сказать что-либо и, в частности, выяснить, имеет ли это уравнение хотя бы одно решение.

Задачи физики и других естественных наук снабжают теорию дифференциальных уравнений проблемами, из которых вырастают богатые содержанием теории. Однако бывает и так, что математическое исследование, рожденное в рамках самой математики, через значительное время после его проведения находит приложение в конкретных физических проблемах в результате их более глубокого изучения. Таким примером может служить задача Трикоми для уравнений смешанного типа, которая спустя более четверти века после ее решения нашла важные применения в задачах современной газовой динамики при изучении сверхзвуковых течений газа.

Ф. Клейн в книге “Лекции о развитии математики в XIX столетии” писал, что “математика сопровождала по пятам физическое мышление и, обратно, получила наиболее мощные импульсы со стороны проблем, выдвигавшихся физикой”.

Второй особенностью теории дифференциальных уравнений является ее связь с другими разделами математики, такими, как функциональный анализ, алгебра и теория вероятностей. Теория дифференциальных уравнений и особенно теория уравнений с частными производными широко используют основные понятия, идеи и методы этих областей математики и, более того, влияют на их проблематику и характер исследований. Некоторые большие и важные разделы математики были вызваны к жизни задачами теории дифференциальных уравнений. Классическим примером такого взаимодействия с другими областями математики являются исследования колебаний струны, проводившиеся в середине XVIII века.

Уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

было выведено Д’Аламбером в 1747 году. Он получил также формулу, которая дает решение этого уравнения:

$$u(t, x) = \Phi_1(x + t) + \Phi_2(x - t),$$

где Φ_1 и Φ_2 — произвольные функции. Эйлер получил для него формулу

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \Psi(s)\,ds,$$

которая дает для него решение с заданными начальными условиями

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Psi(x)$$

(задача Коши). (Эта формула в настоящее время называется формулой Д’Аламбера.) Возник вопрос, какие функции считать решением. Эйлер полагал, что это может быть произвольно начерченная кривая. Д’Аламбер считал, что решение должно записываться аналитическим выражением. Д. Бернулли утверждал, что все решения представляются в виде тригонометрических рядов. С ним не соглашались Д’Аламбер и Эйлер. В связи с этим спором возникли задачи об уточнении понятия функции, важнейшего понятия математического анализа, а также вопрос об условиях представимости функции в виде тригонометрического ряда, который позднее рассматривали Фурье, Дирихле и другие крупные математики и изучение которого привело к созданию теории тригонометрических рядов. Как известно, потребности развития теории тригонометрических рядов привели к созданию современной теории меры, теории множеств, теории функций.

При изучении конкретных дифференциальных уравнений, возникающих в процессе решения физических задач, часто создавались методы, обладающие большой общностью и применявшиеся без строгого математического обоснования к широкому кругу математических проблем. Такими методами являются, например, метод Фурье, метод Ритца, метод Галёркина, методы теории возмущений и другие. Эффективность применения этих методов явилась одной из причин попыток их строгого математического обоснования. Это приводило к созданию новых математических теорий, новых направлений исследований. Так возникла теория интеграла Фурье, теория разложения по собственным функциям и, далее, спектральная теория операторов и другие теории.

В первый период развития теории обыкновенных дифференциальных уравнений одной из основных задач было нахождение общего решения в квадратурах, то есть через интегралы от известных функций (этим занимались Эйлер, Риккати, Лагранж, Д’Аламбер и др.). Задачи интегрирования дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами оказали большое влияние на развитие линейной алгебры. В 1841 году Лиувилль показал, что уравнение Риккати

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

не может быть в общем случае разрешено в квадратурах. Изучение непрерывных групп преобразований в связи с задачами интегрирования дифференциальных уравнений привело к созданию теории групп Ли.

Начало качественной теории дифференциальных уравнений было положено в работах знаменитого французского математика Пуанкаре. Эти исследования Пуанкаре по обыкновенным дифференциальным уравнениям привели его к созданию основ современной топологии.

Таким образом, дифференциальные уравнения находятся как бы на перекрестке математических дорог. С одной стороны, новые важные достижения в топологии, алгебре, функциональном анализе, теории функций и других областях математики сразу же приводят к прогрессу в теории дифференциальных уравнений и тем самым находят путь к приложениям. С другой стороны, проблемы физики, сформулированные на языке дифференциальных уравнений, вызывают к жизни новые направления в математике, приводят к необходимости совершенствования математического аппарата, дают начало новым математическим теориям, имеющим внутренние законы развития, свои собственные проблемы.

В своих “Лекциях о развитии математики в XIX столетии” Ф. Клейн писал: “Математика в наши дни напоминает оружейное производство в мирное время. Образцы восхищают знатока. Назначение этих вещей отходит на задний план.”

Несмотря на эти слова, можно сказать, что нельзя стоять за “разоружение” математики. Вспомним, например, что древние греки изучали конические сечения задолго до того, как было открыто, что по ним движутся планеты. Действительно, созданная древними греками теория конических сечений не находила своего применения почти две тысячи лет, пока Кеплер не воспользовался ею для создания теории движения небесных тел. Исходя из теории Кеплера, Ньютон создал механику, являющуюся основой всей физики и техники.

Другим таким примером может служить теория групп, зародившаяся в конце XVIII века (Лагранж, 1771 год) в недрах самой математики и нашедшая лишь в конце XIX века плодотворное применение сначала в кристаллографии, а позднее в теоретической физике и других естественных науках. Возвращаясь к современности, заметим, что важнейшие научно-технические задачи, такие, как овладение атомной энергией, космические полеты, были успешно решены в Советском Союзе также благодаря высокому теоретическому уровню развития математики в нашей стране.

Таким образом, в теории дифференциальных уравнений ясно прослеживается основная линия развития математики: от конкретного и частного через абстракцию к конкретному и частному.

Как уже говорилось, в XVIII и XIX веках изучались в основном конкретные уравнения математической физики. Из общих результатов теории уравнений с частными производными в этот период следует отметить построение теории уравнений с частными производными первого порядка (Монж, Коши, Шарпи) и теорему Ковалевской.

Теоремы о существовании аналитического (то есть представимого в виде степенного ряда) решения для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также для линейных систем уравнений с частными производными были доказаны ранее Коши (Cauchy, 1789 – 1857). Эти вопросы рассматривались им в нескольких статьях. Но работы Коши не были известны Вейерштрассу, который предложил С.В. Ковалевской изучить вопрос о существовании аналитических решений уравнений с частными производными в качестве докторской диссертации. (Отмечу, что Коши опубликовал 789 статей и большое число монографий; его наследие огромно, поэтому неудивительно, что некоторые его результаты могли остаться некоторое время незамеченными.) С.В. Ковалевская в своей работе опиралась на лекции Вейерштрасса, где рассматривалась задача с начальными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследование Ковалевской придало вопросу о разрешимости задачи Коши для уравнений и систем с частными производными в определенном смысле завершающий характер. Пуанкаре высоко ценил эту работу Ковалевской. Он писал: “Ковалевская значительно упростила доказательство и придала теореме окончательную форму”.

Теорема Ковалевской занимает важное место в современной теории уравнений с частными производными. Ей, пожалуй, принадлежит одно из первых мест по числу применений в различных областях теории уравнений с частными производными: теорема Хольмгрена о единственности решения задачи Коши, теоремы существования решения задачи Коши для гиперболических уравнений (Шаудер, Петровский), современная теория разрешимости линейных уравнений и многие другие результаты используют теорему Ковалевской.

Важным достижением теории уравнений с частными производными явилось создание на рубеже XIX века теории интегральных уравнений Фредгольма и решение основных краевых задач для уравнения Лапласа. Можно считать, что основные итоги развития теории уравнений с частными производными XIX века подведены в учебнике Э. Гурса “Курс математического анализа”, изданном в 20-е годы нашего века. Следует отметить большой вклад, который внесли в теорию дифференциальных уравнений и математическую физику труды М.В. Остроградского по вариационным методам, труды А.М. Ляпунова по теории потенциала и по теории устойчивости движения, труды В.А. Стеклова по обоснованию метода Фурье и другие.

Тридцатые и последующие годы нашего века были периодом бурного развития общей теории уравнений с частными производными. В работах И.Г. Петровского были заложены основы общей теории систем уравнений с частными производными, выделены классы систем уравнений, которые в настоящее время носят название эллиптических, гиперболических и параболических по Петровскому систем, исследованы их свойства, изучены характерные для них задачи.

В теорию уравнений с частными производными все глубже стали проникать идеи функционального анализа. Было введено понятие обобщенного решения как элемента некоторого функционального пространства. Идея обобщенного решения систематически проводилась в работах С.Л. Соболева. В связи с исследованием дифференциальных уравнений Соболевым в 30-годы была создана теория обобщенных функций, играющая исключительно важную роль в современной математике и физике. С.Л. Соболевым была построена теория вложения функциональных пространств, которые в настоящее время носят название пространств Соболева. А.Н. Тихоновым была построена теория некорректных задач.

Выдающийся вклад в современную теорию дифференциальных уравнений внесли российские математики Н.Н. Боголюбов, А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Л.С. Понтрягин, С.Л. Соболев, А.Н. Тихонов и другие.

Влияние на развитие теории уравнений с частными производными в нашей стране оказал семинар, которым в 40-е и 50-е годы руководили И.Г. Петровский, С.Л. Соболев, А.Н. Тихонов. Значительную роль в развитии теории уравнений с частными производными сыграла проблемно-обзорная статья И.Г. Петровского “О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными”, опубликованная в 1946 году в журнале “Успехи математических наук”. В ней изложено состояние теории уравнений с частными производными того времени и намечены пути ее дальнейшего развития. Теперь, спустя почти 50 лет, можно сказать, что развитие теории уравнений с частными производными шло именно по тому пути, который был начертан в этой замечательной статье.

В настоящее время теория дифференциальных уравнений с частными производными представляет собой богатую, сильно разветвленную теорию. Построена теория краевых задач для эллиптических операторов на основе недавно созданного нового аппарата — теории псевдодифференциальных операторов, решена проблема индекса, изучены смешанные задачи для гиперболических уравнений. Важную роль в современных исследованиях гиперболических уравнений играют интегральные операторы Фурье, которые обобщают оператор преобразования Фурье на тот случай, когда фазовая функция в показателе экспоненты, вообще говоря, нелинейно зависит от независимых переменных и частот. С помощью интегральных операторов Фурье изучен вопрос о распространении особенностей решений дифференциальных уравнений, ведущий начало от классических работ Гюйгенса. В последние десятилетия найдены условия корректной постановки краевых задач, исследованы вопросы гладкости решений для эллиптических и параболических систем. Изучены нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка и широкие классы нелинейных уравнений первого порядка, исследована для них задача Коши, построена теория разрывных решений. Глубокому изучению были подвергнуты система Навье–Стокса, система уравнений пограничного слоя, уравнения теории упругости, уравнения фильтрации и многие другие важные уравнения математической физики.

Интересным примером привлечения идей и средств из других областей математики является решение в последние годы задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриса с помощью обратной задачи теории рассеяния. На основе возникшего при этом метода найдены новые классы интегрируемых нелинейных уравнений и систем. При этом существенную роль сыграло применение методов алгебраической геометрии, позволившее, в частности, проинтегрировать уравнения Янга–Миллса, играющие важную роль в квантовой теории поля.

В последние десятилетия возник и интенсивно развивается новый раздел теории уравнений с частными производными — теория усреднения дифференциальных операторов. Эта теория возникла под влиянием задач физики, механики сплошной среды и техники, в частности, связанных с изучением композитов (сильно неоднородных материалов, широко используемых в настоящее время в инженерной технике), пористых сред, перфорированных материалов. Такие задачи приводят к уравнениям с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами или в областях со сложной границей. Численное решение такого рода задач крайне затруднительно. Необходим асимптотический анализ задачи, что и приводит к задачам усреднения.

Много работ в последние годы посвящено изучению поведения решений эволюционных уравнений (то есть уравнений, описывающих процессы, развивающиеся во времени) при неограниченном возрастании времени и возникающих при этом так называемых аттракторов. Продолжает привлекать внимание исследователей вопрос о характере гладкости решений краевых задач в областях с негладкой границей, большое число работ в последние годы посвящено изучению конкретных нелинейных задач математической физики.

За последние полтора – два десятка лет сильно изменилось лицо качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Одним из важных достижений является открытие предельных режимов, которые получили название аттракторов.

Оказалось, что наряду со стационарными и периодическими предельными режимами возможны предельные режимы совершенно иной природы, а именно такие, в которых каждая отдельная траектория неустойчива, а само явление выхода на данный предельный режим структурно устойчиво. Открытие и подробное изучение для систем обыкновенных дифференциальных уравнений таких предельных режимов, называемых аттракторами, потребовало привлечения средств дифференциальной геометрии и топологии, функционального анализа и теории вероятностей. В настоящее время происходит интенсивное внедрение этих математических понятий в приложения. Так, например, явления, происходящие при переходе ламинарного течения в турбулентное при повышении чисел Рейнольдса, описываются аттрактором. Изучение аттракторов предпринято также и для уравнений с частными производными.

Другим важным достижением теории обыкновенных дифференциальных уравнений явилось изучение структурной устойчивости систем. При использовании любой математической модели возникает вопрос о корректности применения математических результатов к реальной действительности. Если результат сильно чувствителен к малейшему изменению модели, то сколь угодно малые изменения модели приведут к модели с совершенно иными свойствами. Такие результаты нельзя распространять на исследуемый реальный процесс, так как при построении модели всегда проводится некоторая идеализация и параметры определяются лишь приближенно.

Это привело А.А. Андронова и Л.С. Понтрягина к понятию грубости системы обыкновенных дифференциальных уравнений или понятию структурной устойчивости. Это понятие оказалось очень плодотворным в случае малой размерности фазового пространства (1 или 2), и в этом случае вопросы структурной устойчивости были детально изучены.

В 1965 году Смейл показал, что при большой размерности фазового пространства существуют системы, в некоторой окрестности которых нет ни одной структурно устойчивой системы, то есть такой, что при малом изменении векторного поля она остается в определенном смысле эквивалентной первоначальной. Этот результат имеет фундаментальное значение для качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, так как показывает неразрешимость задачи топологической классификации систем обыкновенных дифференциальных уравнений, и может быть сравним по своему значению с теоремой Лиувилля о неразрешимости дифференциальных уравнений в квадратурах.

К важным достижениям можно отнести построение А.Н. Колмогоровым теории возмущений гамильтоновых систем, обоснование метода усреднения для многочастичных систем, развитие теории бифуркаций, теории возмущений, теории релаксационных колебаний, дальнейшее глубокое изучение показателей Ляпунова, создание теории оптимального управления процессами, описываемыми дифференциальными уравнениями.

Таким образом, теория дифференциальных уравнений в настоящее время представляет собой исключительно богатый содержанием, быстро развивающийся раздел математики, тесно связанный с другими областями математики и с ее приложениями.

Бурбаки, говоря об архитектуре математики, так характеризует ее современное состояние:

> “Дать в настоящее время общее представление о математической науке — значит заниматься таким делом, которое, как кажется, с самого начала наталкивается на почти непреодолимые трудности благодаря обширности и разнообразию рассматриваемого материала. Статьи по чистой математике, публикуемые во всем мире в среднем в течение одного года, составляют многие тысячи страниц. Не все они, конечно, имеют одинаковую ценность; тем не менее, после очистки от неизбежных отбросов оказывается, что каждый год математическая наука обогащается массой новых результатов, приобретает все более разнообразное содержание и постоянно дает ответвления в виде теорий, которые беспрестанно видоизменяются, перестраиваются, сопоставляются и комбинируются друг с другом. Ни один математик не в состоянии проследить это развитие во всех подробностях, даже если он посвятит этому всю свою деятельность. Многие из математиков устраиваются в каком-либо закоулке математической науки, откуда они не стремятся выйти и не только почти полностью игнорируют все то, что не касается предмета их исследований, но не в силах даже понять язык и терминологию своих собратьев, специальность которых далека от них”. (Н. Бурбаки, “Очерки по истории математики”, М.: ИЛ, 1963 г.)

Однако нельзя, как мне кажется, отрицать значение для математических исследований даже тех, кто находится “в закоулке” математической науки. Основное русло математики, как и большой реки, питают прежде всего небольшие ручейки. Крупные открытия, прорыв фронта исследований очень часто обеспечиваются и подготавливаются кропотливым трудом очень многих исследователей. Все сказанное относится не только ко всей математике, но и к одному из самых обширных ее разделов — теории дифференциальных уравнений, которая в настоящее время представляет собой трудно обозримую совокупность фактов, идей и методов, очень полезных для приложений и стимулирующих теоретические исследования во всех других разделах математики.

Многие разделы теории дифференциальных уравнений так разрослись, что стали самостоятельными науками. Можно сказать, что большая часть путей, связывающих абстрактные математические теории и естественнонаучные приложения, проходит через дифференциальные уравнения. Все это обеспечивает теории дифференциальных уравнений почетное место в современной науке.

* * *

Ольга Арсеньевна Олейник, академик РАН, зав. кафедрой дифференциальных уравнений Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, главный научный сотрудник Математического института РАН им. В.А. Стеклова. Лауреат Государственной премии, лауреат премий им. Ломоносова, Петровского, Чеботарева. Автор 8 книг и более 340 других работ.