

DIRECTION FIELDS AND
THEIR CORRESPONDING
TRAJECTORIES

M. I. VISHIK

This paper is an introduction to the theory of the first order ordinary differential equations on a plane. The following subjects and methods used in the theory of such equations are described: direction fields, elementary methods of construction of the direction field trajectories and integration of differential equations, the existence and uniqueness theorem for the Cauchy problem, and the Euler method.

В статье дается введение в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на плоскости. Описываются следующие основные понятия и методы, используемые в теории таких уравнений: поле направлений, элементарные методы построения траекторий поля направлений и интегрирования дифференциальных уравнений, теорема существования и единственности решения задачи Коши, метод Эйлера.

© Вишик М.И., 1996

ПОЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ И
СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ
ТРАЕКТОРИИ

М. И. ВИШИК

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

1. ПОЛЕ НАПРАВЛЕНИЙ И ТРАЕКТОРИИ ЭТОГО ПОЛЯ

Во многих задачах физики и механики исследуются установившиеся движения жидкости или газа. При этом представляют интерес траектории движения частиц. Обычно они представляют собой семейство кривых. Мы будем рассматривать для простоты лишь семейства кривых на плоскости \mathbf{R}^2 , заполняющие некоторую область $G \subset \mathbf{R}^2$. Направление установившегося движения жидкости вдоль кривой (изображающей движение частицы) в данной ее точке P определяется касательной к этой кривой в точке P . Для определенности мы будем это направление изображать отрезком касательной, центр которого есть точка P . Если в каждой точке семейства кривых провести такой отрезок касательной, мы получим семейство отрезков с отмеченными точками P (их серединами). Такое семейство отрезков с отмеченными точками P называется полем направлений этого семейства кривых. Можно также определить поле направлений независимо от семейства кривых.

Определение 1. Говорят, что в плоской области G задано поле направлений, если через каждую точку $P \in G$ проходит отрезок, имеющий эту точку P своей серединой (рис. 1).

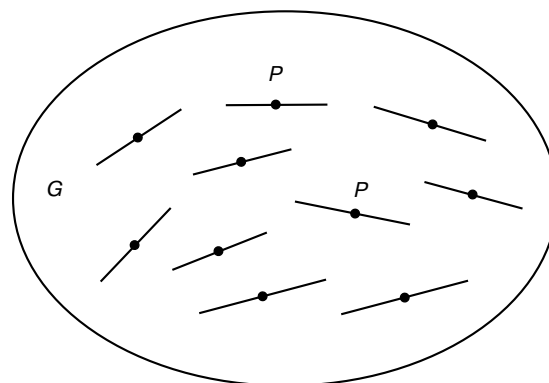


Рис. 1.

Определение 2. Траекторией поля направлений (или интегральной кривой поля направлений) называется кривая L , $L \subset G$, которая в каждой точке $P \in G$ касается отрезка поля направлений, имеющего эту точку P своей серединой (рис. 2).

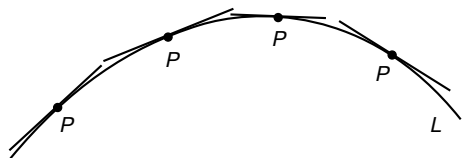


Рис. 2.

В физических, геометрических и других вопросах естествознания возникает следующая задача: пусть в области G задано поле направлений (рис. 1); найти все траектории (интегральные кривые) L этого поля направлений.

Кроме того, представляет интерес еще такая задача: в области G задано поле направлений (рис. 1) и точка $P_0 \in G$; найти траекторию этого поля направлений, которая проходит через точку P_0 .

2. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ПОЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ

а) Рассмотрим поле направлений на плоскости с выколотой точкой (началом координат), определяемое следующим образом: отрезок поля направлений, проходящий через точку $P = (x, y) \neq (0, 0)$, перпендикулярен отрезку, соединяющему (x, y) с началом координат $(0, 0)$. Легко видеть, что траекториями L этого поля направлений будут любые окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$, где $R > 0$ – любое фиксированное число.

б) Рассмотрим поле направлений на плоскости с выколотым началом координат, состоящее из отрезков, лежащих на прямых, проходящих через начало координат. Очевидно, траекториями такого поля направлений являются любые лучи без начала, выходящие из начала координат.

Замечание. В этих примерах поля направлений не задаются в начале координат. Отметим, что эти поля направлений нельзя доопределить в точке $(0, 0)$ таким образом, чтобы они оставались непрерывно зависящими от (x, y) в точке $(0, 0)$.

в) Пусть дано поле направлений, заданное следующим свойством: угловой коэффициент $\operatorname{tg} \alpha$ отрезка этого поля с центром в точке (x, y) определяется равенством

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{y}{x} \quad (1)$$

(на оси ординат поле вертикально; в начале координат – опять-таки не определено).

Легко видеть, что траектории этого поля – это ветви гипербол вида

$$xy = C, \quad (2)$$

где C – любая константа (рис. 3).

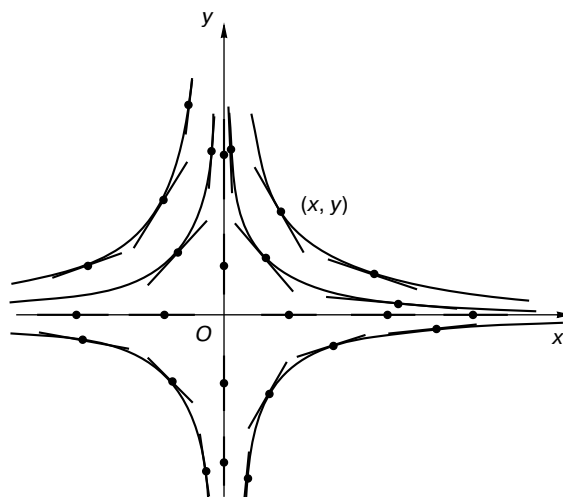


Рис. 3.

Действительно, пусть $y = y(x)$ – одна из гипербол (2). Тогда

$$xy(x) \equiv C. \quad (3)$$

Взяв производную по x от обеих частей (3), получим

$$1 \cdot y(x) + x \frac{dy(x)}{dx} \equiv 0.$$

Отсюда

$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{y(x)}{x}. \quad (4)$$

Так как $\frac{dy(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ – угловой коэффициент касательной к графику $(x, y(x))$ гиперболы, то из (4) следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{y(x)}{x}. \quad (5)$$

Таким образом, доказано, что любая гипербола, определяемая уравнением (2), является траекторией поля направлений, заданного условием (1). Отметим, что положительные и отрицательные полуоси прямых Ox и Oy также являются траекториями поля направлений.

3. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Весьма часто вместо поля направлений задают соотношения вида (4), которые, как мы видим, соответствуют полям направлений. (Ниже мы это объясним подробнее.) В (4) $\frac{dy(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ – угловой коэффициент касательной к траектории поля направлений в точке $(x, y(x))$, а правая часть (4) $\left(-\frac{y(x)}{x}\right)$ указывает, чему равно $\frac{dy(x)}{dx}$ в точке $(x, y(x))$. Соотношения вида (4) называются дифференциальными уравнениями. При этом вместо $y(x)$ пишут обычно y . Таким образом, (4) записывают в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Задача о нахождении всех функций $y = y(x)$, удовлетворяющих такому соотношению, называется задачей интегрирования этого дифференциального уравнения. Приведем некоторые примеры дифференциальных уравнений и методы их интегрирования.

а) Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad (6)$$

где $f(x)$ – заданная непрерывная функция. Найдем решения $y = y(x) = \varphi(x)$ этого уравнения, то есть такие функции $y = \varphi(x)$, для которых

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x).$$

Как известно, первообразной функции $f(x)$ называется такая дифференцируемая функция $F(x)$, что $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$. Отметим, что если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то $F(x) + C$ также является первообразной $f(x)$. Таким образом, решениями уравнения (6) является семейство функций $y = F(x) + C$ или $y = \int f(x)dx$ – неопределенный интеграл функции $f(x)$.

Отметим, что уравнению (6) соответствует поле направлений, полученное по следующему правилу: угловой коэффициент $\operatorname{tg} \alpha$ отрезка поля направлений в точке $P = (x, y) \in G$, где G – область в \mathbb{R}^2 , равен $f(x)$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = f(x). \quad (7)$$

Таким образом, отрезки поля направлений, лежащие на одной вертикальной прямой, то есть имеющие в точках $P = (x, y)$ одинаковые значения абсциссы x , параллельны (так как в них согласно (7) $\operatorname{tg} \alpha = f(x) = \operatorname{const}$ при заданном x). Интегральными кривыми этого поля направлений являются траектории, полученные любым сдвигом одной из его траекторий $y = F(x)$ в направлении оси Oy ($y = F(x) + C$).

б) Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = g(y), \quad (8)$$

где $g(y)$ – непрерывная функция переменной y . Для нахождения решений этого уравнения удобно считать y независимой переменной, а $x = \psi(y)$ – искомой функцией. При этом воспользуемся следующим известным фактом: если $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (8), то обратная к $y = \varphi(x)$ функция $x = \psi(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi(y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{g(y)}. \quad (9)$$

Мы найдем решения уравнения (8) или, что эквивалентно, уравнения (9) в таких областях плоскости (x, y) , в которых $g(y) \neq 0$. Уравнение (9) имеет такой же вид, как и уравнение (6), если поменять x и y местами. Поэтому решения уравнения (9) задаются формулой

$$x = \int \frac{1}{g(y)} dy = G(y) + C,$$

где $G(y)$ – первообразная функции $1/g(y)$. Что касается исходного уравнения (8), то его решениями являются функции $y = F(x - C)$, где $y = F(x)$ – функция, обратная к $x = G(y)$.

Отметим, что поле направлений, соответствующее уравнению (8), состоит из отрезков, одинаково направленных при фиксированном значении y , так как согласно (8) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = g(y)$.

При этом, зная одно решение $x = G(y)$ уравнения (8) (или (9)), все остальные решения получаются с помощью параллельного сдвига этого решения в направлении оси Ox : $x = G(y) + C$.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ ПОЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ

Как известно, производная $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ функции $y = \varphi(x)$ имеет следующий геометрический смысл: пусть L – график функции $y = \varphi(x)$, то есть

совокупность точек $(x, \varphi(x))$, $a < x < b$, на плоскости (x, y) . Тогда $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \equiv \frac{d\varphi(x)}{dx}$ совпадает с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \alpha$ касательной, проведенной к кривой L в точке $(x, \varphi(x))$. При этом α , $0 \leq \alpha \leq \pi$, — угол между касательной к L в точке $(x, \varphi(x))$ и положительной полуосью Ox . Очевидно, предполагается, что существует производная $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ в точке x .

Ряд физических и геометрических задач приводит к нахождению всех таких функций $y = y(x) = \varphi(x)$, производная которых $\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx}$ в точке $(x, y) = (x, \varphi(x)) = (x, \varphi(x))$ равна значению заданной функции $f(x, y)$ в точке $(x, y(x)) = (x, \varphi(x))$. Иными словами, задается уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \left(\text{или} \quad \frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x)) \right). \quad (10)$$

Решением этого уравнения называется любая функция $y = y(x) \equiv \varphi(x)$, $a < x < b$, производная которой $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ совпадает со значением правой части (10), в которой вместо y подставлена функция $\varphi(x)$, то есть

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x)), \quad a < x < b.$$

Например, пусть дано дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = 2xy. \quad (11)$$

Его решениями являются функции вида $y = Ce^{x^2}$, где C — произвольная постоянная. Действительно, для этих функций

$$\frac{dy}{dx} = C \cdot 2xe^{x^2},$$

а правая часть уравнения (11) для них

$$2xy = 2xCe^{x^2}.$$

Таким образом, для $y = Ce^{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = C \cdot 2xe^{x^2} \equiv 2xy = 2xCe^{x^2}.$$

Мы доказали, что семейство решений $y = Ce^{x^2}$ при любом постоянном значении C является решением уравнения (11).

Уравнению (10) можно сопоставить поле направлений следующим образом: через каждую точ-

ку $P = (x, y) \in G$, в которой задано $f(x, y)$, провести отрезок прямой, имеющей угловой коэффициент

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f(x, y). \quad (12)$$

При этом точка $(x, y) = P$ — середина такого отрезка. Тогда в области G возникает поле направлений, полученное согласно (12).

Задача о нахождении решений

$$y = \varphi(x), \quad a < x < b,$$

уравнения (10) и задача о нахождении траекторий L поля направлений, порожденного уравнением (10), эквивалентны. Действительно, график L любого решения $y = \varphi(x)$, $a < x < b$, уравнения (10) является траекторией поля направлений этого уравнения (10).

В самом деле, согласно (10) в любой точке $(x, \varphi(x)) \in L$ отрезки построенного по уравнению (10) поля направлений (см. рис. 4) касаются кривой L в силу условия (12), которому удовлетворяет функция $\varphi(x)$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x)).$$

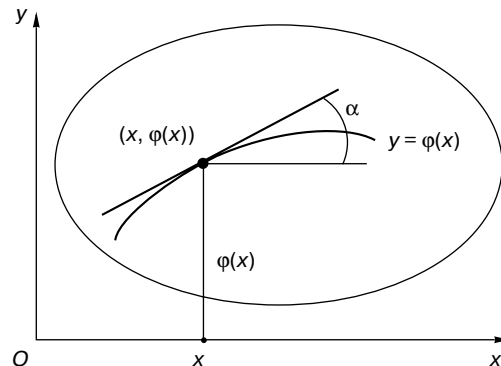


Рис. 4.

Таким образом, график $L = \{(x, \varphi(x)), a < x < b\}$, где $\varphi(x)$ — решение уравнения (10), является траекторией поля направлений, порожденного уравнением (10).

С другой стороны, каждому полю направлений (см. рис. 1) можно сопоставить дифференциальное уравнение вида (10), для которого оно является полем направлений. Действительно, в каждой точке P области G с декартовыми координатами (x, y) ($P = (x, y)$) можно вычислить $\operatorname{tg} \alpha = k$ — угловой коэффициент отрезка поля направлений, проходящего

через эту точку. Положим в точке (x, y) функцию $f(x, y)$ равной значению $\operatorname{tg} \alpha$ отрезка поля направлений, проходящего через (x, y) :

$$f(x, y) = \operatorname{tg} \alpha \quad (13)$$

($\operatorname{tg} \alpha = k$ – угловой коэффициент отрезка поля направлений в точке (x, y) (рис. 1)). Теперь заданному полю направлений (см. рис. 1) сопоставим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (14)$$

где $f(x, y)$ определено формулой (13). Легко видеть, что траектория L поля направлений (рис. 1), являющаяся графиком некоторой дифференцируемой функции $y = \varphi(x)$ ($L = \{(x, \varphi(x)), a < x < b\}$), удовлетворяет уравнению (14). Действительно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha,$$

где $\operatorname{tg} \alpha$ – угловой коэффициент касательной к кривой L в точке $(x, \varphi(x))$. По приведенному выше построению (см. (13)) $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y) = f(x, \varphi(x))$. Таким образом, функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет тождеству

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x)) \quad (14')$$

и, следовательно, является решением уравнения (14). Мы доказали, что между полями направлений (рис. 1) и дифференциальными уравнениями вида (10) имеется взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое соотношением (12).

5. НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЗАДАННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Многие задачи геометрии, физики, механики и других естественных наук приводят к нахождению решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (10), проходящего через точку (x_0, y_0) области G , то есть такого решения $y = \varphi(x)$, $a < x < b$, $a < x_0 < b$, для которого

$$y(x_0) = y_0. \quad (15)$$

Эту задачу называют начальной задачей, или задачей Коши.

Предполагается, что:

(I) функция $f(x, y)$ (то есть правая часть уравнения (10)) непрерывно зависит от x, y , $(x, y) \in G$;

(II) производная $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ функции $f(x, y)$ по второму аргументу (y) при фиксированном первом аргументе (x) непрерывно зависит от точки $(x, y) \in G$.

Приведем основную теорему о разрешимости этой задачи.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия (I), (II).*

1) *Для всякой точки (x_0, y_0) области G найдется решение $y = y(x) = \varphi(x)$ уравнения (10), удовлетворяющее условию (15).*

2) *Если два решения $y = \psi(x)$ и $y = \varphi(x)$ уравнения (10) совпадают при $x = x_0$, то есть*

$$\psi(x_0) = \varphi(x_0), \quad (16)$$

то эти решения тождественно равны ($\psi(x) = \varphi(x)$) для всех тех значений x , для которых они определены.

Идея доказательства утверждения 1) приводится в п. 6. Доказательство утверждения 2) можно найти в книгах [1 – 5].

Если выполнено утверждение 1), то говорят, что имеет место теорема существования решения начальной задачи (10), (15). При выполнении утверждения 2) говорят, что имеет место единственность решения этой задачи.

Как отмечалось в п. 4, каждому уравнению (10) отвечает поле направлений, состоящее из отрезков, имеющих середину в точке (x, y) и угловой коэффициент $\operatorname{tg} \alpha$ (см. (14')). При этом если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям (I) и (II) настоящего пункта, то, согласно теореме 1, через каждую точку $P = (x, y) \in G$ проходит и притом единственная траектория этого поля.

6. МЕТОД ЛОМАНЫХ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ (10), (15)

Нахождение явного решения $y = \varphi(x)$ начальной задачи (10), (15) иногда сопряжено с большими трудностями или просто невозможно. Поэтому применяют различные приближенные методы нахождения решения $y = \varphi(x)$ задачи (10), (15).

Опишем один из самых простых приближенных методов, а именно приближенный метод Эйлера.

Пусть дано уравнение (10) и начальная точка $(x_0, y_0) \in G$. Уравнению (10) соответствует поле направлений, отрезки которого имеют в точке $(x, y) \in G$ угловой коэффициент k , определяемый равенством (13):

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f(x, y). \quad (17)$$

Выберем достаточно малое число $h > 0$. Ломаная Эйлера, отвечающая числу h , строится следующим образом (см. рис. 5): из начальной точки (x_0, y_0) мы сдвигаемся вдоль отрезка поля направлений, имеющего середину в (x_0, y_0) , в точку $(x_0 + h, y_1)$, где

$$y_1 = y_0 + h \operatorname{tg} \alpha_0, \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = f(x_0, y_0). \quad (18)$$

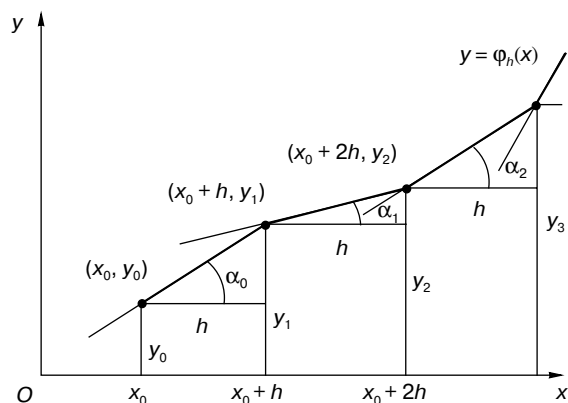


Рис. 5.

Далее, из точки $(x_0 + h, y_1)$ мы сдвигаемся вправо на шаг h вдоль отрезка поля направлений, имеющего середину в точке $(x_0 + h, y_1)$. Так как в точке $(x_0 + h, y_1)$ отрезок поля направлений имеет угловой коэффициент

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = f(x_0 + h, y_1), \quad (19)$$

где y_1 задается формулой (18), то мы придем таким образом в точку $(x_0 + 2h, y_2)$, где

$$y_2 = y_1 + h \operatorname{tg} \alpha_1 = y_1 + hf(x_0 + h, y_1), \quad (20)$$

и т.д. Мы получим ломаную $y = \varphi_h(x)$, которая задается соотношениями

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} y_0 + [x - x_0] \operatorname{tg} \alpha_0, & \text{если } x_0 \leq x \leq x_0 + h, \\ y_1 + [x - (x_0 + h)] \operatorname{tg} \alpha_1, & \\ \text{если } x_0 + h \leq x \leq x_0 + 2h, & \\ y_2 + [x - (x_0 + 2h)] \operatorname{tg} \alpha_2, & \\ \text{если } x_0 + 2h \leq x \leq x_0 + 3h, & \\ \dots & \end{cases} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_0 &= f(x_0, y_0), \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= f(x_0 + h, y_1), \quad y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= f(x_0 + 2h, y_2), \quad y_2 = y_1 + hf(x_0 + h, y_1), \\ &\dots \end{aligned}$$

Полученная таким образом ломаная $y = \varphi_h(x)$, $x_0 \leq x \leq x_0 + hk$ называется ломаной Эйлера. Зафиксируем интервал $(x_0, x_0 + a)$ и выберем h и k такими, чтобы $a = hk$.

Теорема 2. Если функция $f(x, y)$ в (10) удовлетворяет условиям (I) и (II) предыдущего пункта и число a

выбрано настолько малым, что при достаточно малом h ломаные Эйлера $y = \varphi_h(x)$ лежат в области G , то $\varphi_h(x)$ при $h \rightarrow 0$ стремится к $\varphi(x)$, где $y = \varphi(x)$ — решение начальной задачи (10), (15).

Утверждение теоремы 2 интуитивно очевидно. Его строгое доказательство содержится в учебниках по обыкновенным дифференциальным уравнениям (см. [1–5]).

7. ПРИМЕР НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}. \quad (22)$$

Правая часть этого уравнения $3y^{2/3} \equiv f(x, y) \equiv f(y)$ — непрерывная функция переменных (x, y) на всей плоскости, следовательно, выполнено условие (I) пункта 5. Производная по y правой части (22)

$$\frac{\partial(3y^{2/3})}{\partial y} = 2y^{-1/3}$$

обращается в ∞ при $y = 0$ и, следовательно, не является непрерывной функцией на оси x . Покажем, что если начальная точка (x_0, y_0) лежит на оси x , то есть

$$y(x_0) = 0 = y_0, \quad (23)$$

то для начальной задачи (22), (23) нарушается свойство единственности ее решения.

Действительно, легко проверить, что решением задачи (22), (23) является кубическая парабола

$$y = (x - x_0)^3. \quad (24)$$

В самом деле, $\frac{dy}{dx} = 3(x - x_0)^2$, а правая часть уравнения (22) равна $3[(x - x_0)^3]^{2/3}$. Следовательно, функция (24) удовлетворяет уравнению (22) и начальному условию (23): $y(x_0) = 0$.

С другой стороны, прямая

$$y \equiv 0 \quad (25)$$

также удовлетворяет уравнению (22) и начальному условию (23). Таким образом, через любую начальную точку $(x_0, 0)$ проходят по крайней мере два решения $y = (x - x_0)^3$ и $y = 0$ уравнения (22). Мы видим, что вторая часть теоремы 1 (единственность) не имеет места для уравнения (22).

В том случае, когда правая часть уравнения (10) разрывна в точке (x_0, y_0) , может нарушаться и теорема существования, то есть первая часть теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1971.
2. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1964.
3. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1961.
4. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.; Л.: ГОНТИ, 1939.

5. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения. М., 1957.

* * *

Марко Иосифович Вишик, доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного университета, главный научный сотрудник Института проблем передачи информации РАН, автор 232 научных работ и 4 монографий.