ДИНАМИКА ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Н. Б. МЕДВЕДЕВА
Челябинский государственный университет

DYNAMICS OF THE LOGISTIC FUNCTION

N.B. MEDVEDEVA

The bifurcations of the logistic function are studied. Period doubling cascade leading to chaos and the Cantor invariant set at which the system is chaotic are observed.

Описаны бифуркации динамической системы, задаваемой одномерным отображением – логистической функцией. Рассмотрены такие явления, как каскад бифуркаций удвоения периода, приводящий систему к хаосу, и инвариантное множество канторовского типа, на котором система ведет себя хаотическим образом.

ВВЕДЕНИЕ

Изучая физику в школе, мы привыкли думать, что если известны действующие силы, а также начальные положения и скорости частиц, то, обладая достаточно мощным вычислительным инструментарием, можно предсказать развитие системы для любого сколь угодно далекого момента времени.

Однако в последние десятилетия было обнаружено, что движение даже очень простых динамических систем бывает невозможно предсказать на большой интервал времени несмотря на отсутствие в уравнениях случайных параметров. Такие движения были названы хаотическими. Существует ряд физических критериев хаоса, например: чувствительность к изменению начальных условий, наличие бесконечной серии бифуркаций удвоения периода, дробность какой-либо размерности, наличие положительного ляпуновского показателя и т.д.

Одной из простейших задач, демонстрирующих хаотичность поведения, являются нелинейная модель роста популяции или логистическое уравнение

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n).$$

В статье на примере этой простой модели мы наблюдаем некоторые признаки хаотического поведения орбит дискретной динамической системы.

1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Рассмотрим функцию, отображающую некоторое множество в себя:

$$f: M \longrightarrow M. \qquad (1)$$

Итерация $f_{(n)}$ функции f определяется как композиция f с самой собой в количестве n раз:

$$f^{(0)} = f, \qquad f^{(n)} = f^{(n-1)} \circ f.$$

Поскольку каждая точка $x \in M$ под действием итераций функции f как-то перемещается по множеству M, то функция (1) задает дискретную динамическую систему, то есть некое движение на множестве M с течением дискретного времени n. Итерации функции определены необязательно на всем множестве M. Если для некоторой точки $x \in M$ определены все итерации $f^{(n)}(x)$, то множество $\{f^{(n)}(x): n \in N\}$ называется орбитой точки x под действием функции f.

Точка x называется неподвижной точкой функции f, если $f^{(n)}(x) = x$ для любого n. Неподвижная точка x функции f называется притягивающей, если все точки из некоторой ее окрестности стремятся к x под действием итераций функции f; она называется отталкивающей, если все точки из некоторой ее окрестности покидают эту окрестность под действием итераций функции f.

Если функция f непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности неподвижной точки x и

$$|f'(x)| < 1, \tag{2}$$

то x является притягивающей неподвижной точкой. Действительно, из теоремы Лагранжа о конечных приращениях для всех y, достаточно близких к x, вытекает оценка

$$|f^{(n)}(y) - x| = |f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x)| \le q^n \cdot |y - x|,$$

где q — величина, оценивающая $|f'|$ сверху в малой окрестности точки x. В силу условия (2) $q < 1$, поэтому левая часть стремится к нулю с ростом n.

Аналогично, если

$$|f'(x)| > 1 \tag{3}$$

то x является отталкивающей неподвижной точкой.

Если в неподвижной точке выполняются условия (2) или (3), то x называется гиперболической неподвижной точкой.

Точка x называется периодической точкой функции f периода k, если $f^{(k)}(x) = x$, причем $f^{(i)}(x) \ne x$ при $i < k$. Орбита периодической точки состоит из k точек и называется циклом периода k. Точка x является периодической точкой функции f периода k, если она является неподвижной точкой итерации $f^{(k)}$, но не является неподвижной точкой итераций с меньшими номерами.

2. ЛОГИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Качественное поведение динамической системы определяется количеством и расположением неподвижных точек, циклов и предельным поведением орбит.

Рассмотрим семейство функций f_λ, зависящее от параметра λ:

$$f_\lambda: M \longrightarrow M.$$

При каждом значении λ функция f_λ определяет дискретную динамическую систему. Чаще всего при малом изменении параметра динамика, определяемая функцией f_λ, меняется мало. Лишь немного сдвигаются неподвижные точки, циклы и т.д. Однако при некоторых значениях параметра происходит резкое изменение качественной картины, например меняется количество неподвижных точек или притягивающие точки превращаются в отталкивающие. Скачкообразное изменение качественного поведения динамической системы при плавном изменении параметра называется бифуркацией. Примеры бифуркаций динамических систем, в том числе дискретных, приведены в [1].

В статье мы будем изучать динамическую систему, задаваемую логистической функцией

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x) \tag{4}$$

при положительных значениях параметра λ. Неподвижные точки функции (4) определяются из уравнения $\lambda x(1-x) = x$ и имеют координаты $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$. Вычисляя производные $f'(0) = \lambda$, $f'\left(\dfrac{\lambda-1}{\lambda}\right) = 2 - \lambda$ и приравнивая их к ±1, получаем, что неподвижные точки теряют гиперболичность при $\lambda = 1$ и $\lambda = 3$. Потеря гиперболичности, как правило, сопровождается бифуркацией.

Действие дискретной динамической системы в простых случаях удобно наблюдать на диаграмме Ламерея (рис. 1).

Если $0 < \lambda < 1$, то $x_1 = 0$ является притягивающей неподвижной точкой, а точка x_2, лежащая слева от нуля, — отталкивающей. Как видно из рис. 1, *а*, каждая точка оси $0x$ под действием итераций функции f стремится либо к нулю, либо к x_2, либо уходит в бесконечность.

Значение $\lambda = 1$, когда точка $x_1 = 0$ теряет гиперболичность, является бифуркационным. При этом значении две неподвижные точки сливаются в одну негиперболическую точку $x_1 = 0$, которая не является ни притягивающей, ни отталкивающей (см. рис. 1, *б*).

Заметим, что при $\lambda \ge 1$ (см. рис. 1, *в*) все точки, лежащие вне отрезка [0; 1], уходят в бесконечность под действием итераций функции f_λ, поэтому далее мы будем интересоваться только поведением орбит точек из отрезка [0; 1].

При $1 < \lambda < 3$ точка $x_1 = 0$ является отталкивающей, а точка $x_2 = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$ – притягивающей неподвижной точкой. Диаграмма Ламерея для этого случая изображена на рис. 1, *в*; все точки интервала (0; 1) стремятся к x_2.

3. БИФУРКАЦИИ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА

Следующая бифуркация происходит при $\lambda = 3$, когда неподвижная точка x_2 теряет гиперболичность и из притягивающей при $\lambda < 3$ превращается в отталкивающую при $\lambda > 3$.

Поскольку при $\lambda > 3$ обе неподвижные точки являются отталкивающими, то естественно ожидать

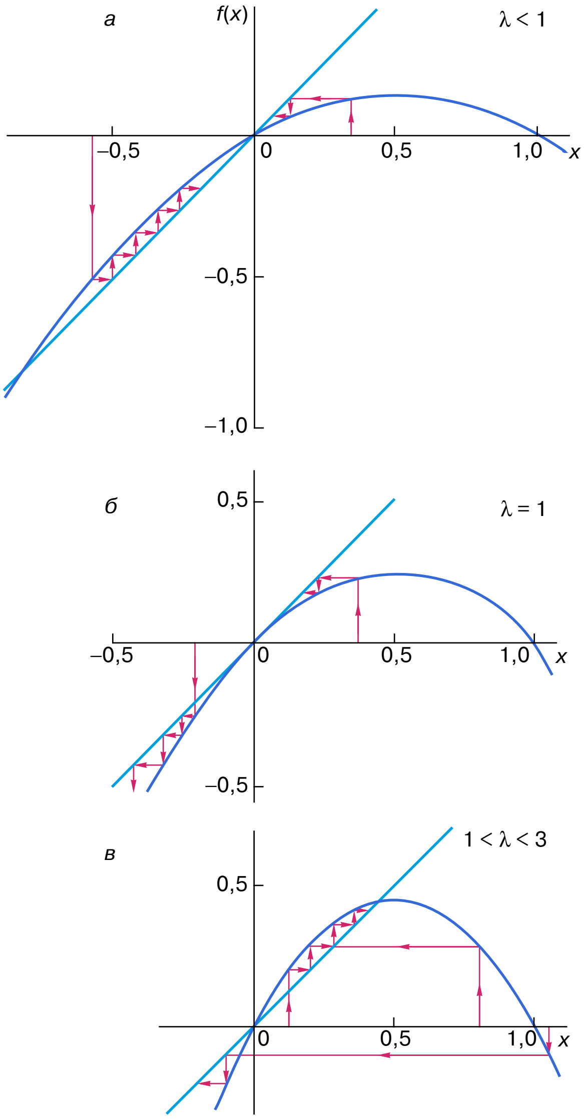

Рис. 1. График функции $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ для случаев $\lambda < 1$ (*а*), $\lambda = 1$ (*б*), $1 < \lambda < 3$ (*в*). При $\lambda = 1$ $f_\lambda(0) = 1$, то есть неподвижная точка 0 не является гиперболической в момент бифуркации. Красными стрелками показаны преобразования точек под действием отображения $f_\lambda(x)$

появления некого притягивающего объекта между ними. Так оно и происходит. Если посмотреть на график отображения $f_\lambda^{(2)}$ при значениях λ, немного больших 3, то помимо неподвижной точки x_2 можно увидеть (см. рис. 2) еще две неподвижные точки a_1 и a_2, которые не являются неподвижными точками f_λ и, следовательно, образуют цикл периода 2, причем притягивающий, поскольку $|(f^{(2)})'(a_i)| < 1$. Тем самым при $\lambda = 3$ имеет место бифуркация удвоения периода: притягивающая неподвижная точка (цикл периода 1) превращается в отталкивающую, а рядом с ней появляется цикл вдвое большего периода. Все точки интервала (0; 1) притягиваются к этому циклу. Так происходит до некоторого значения λ, при котором цикл периода 2 теряет устойчивость. Это значение λ соответствует моменту обращения производных $(f^{(2)})'(a_i)$ в минус единицу и равно $\lambda_2 \approx 3{,}45$. При прохождении параметром λ этого значения динамика графика итерации $f_\lambda^{(4)}$ вблизи каждой из точек a_1 и a_2 очень сильно напоминает рис. 2, *а*–*в* в окрестности точки x_2. При $\lambda > \lambda_2$ рядом с каждой из точек a_1 и a_2 появляются еще две неподвижные точки $f_\lambda^{(4)}$, то есть возникает цикл периода 4, притом устойчивый. Таким образом, при $\lambda = \lambda_2$ имеет место еще одна бифуркация удвоения периода.

При дальнейшем увеличении λ появляется бесконечная последовательность $\{\lambda_n\}$ значений параметра λ, такая, что при $\lambda = \lambda_n$ происходит потеря устойчивости цикла периода 2^n и возникает устойчивый цикл периода 2^{n+1}.

Для того чтобы пронаблюдать этот каскад бифуркаций удвоения периода, можно легко воспроизвести следующий численный эксперимент с помощью персонального компьютера. Выберем какое-нибудь начальное значение, например $x_0 = 0{,}1$, и проделаем 100 итераций отображения f_λ. Затем отложим значения $f_\lambda^{(n)}(x_0)$, полученные в результате следующих 300 итераций по вертикальной оси, а соответствующие значения λ – по горизонтальной. По оси λ пройдем отрезок от 2,8 до 4 с

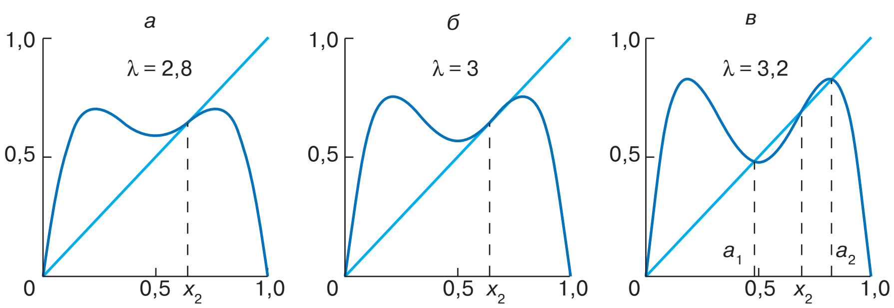

Рис. 2. График функции $f_\lambda^{(2)}$ для значений параметра, близких к $\lambda = 3$: $\lambda = 2{,}8$ (*а*), $\lambda = 3$ (*б*), $\lambda = 3{,}2$ (*в*). В момент бифуркации ($\lambda = 3$) значение производной в неподвижной точке x_2 проходит через 1. Точки a_1 и a_2 образуют цикл периода 2

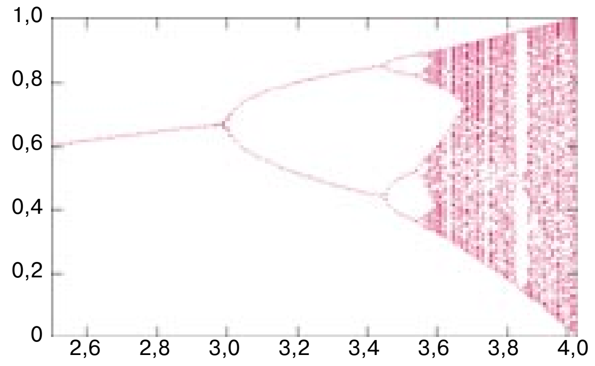

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма функции $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$, образованная ее итерациями от 100-й до 400-й

шагом 0,001. Полученное множество (см. рис. 3) можно рассматривать как бифуркационную диаграмму. На диаграмме хорошо видны классические бифуркации типа вил в точках удвоения периода.

М. Фейгенбаум в 1978 году обнаружил, что последовательность $\{\lambda_n\}$ бифуркационных значений сходится к пределу со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{\delta}$, где $\delta \approx 4{,}6692$ – число, которое с тех пор получило название константы Фейгенбаума. Эта константа замечательна своей универсальностью, которая состоит в следующем. Оказывается, последовательность бифуркаций удвоения периода часто реализуется в типичных однопараметрических динамических системах, необязательно одномерных, на конечном отрезке изменения параметра и приводит систему от устойчивого периодического режима к хаосу, причем величина $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$ одинакова для всех типичных семейств и равна δ. В качестве упражнения читателю предлагается построить бифуркационную диаграмму и обнаружить каскад бифуркаций удвоения периода в семействах $\lambda\sin\pi x$ и $x^2 + \lambda$.

Свойство универсальности и число Фейгенбаума были обнаружены в различных многомерных физических системах на стадиях, предшествующих хаосу, например при численном исследовании знаменитой модели Лоренца.

Пользуясь константой Фейгенбаума, можно вычислить предельное значение последовательности $\{\lambda_n\}$. Для логистического семейства оно равно $\lambda_\infty \approx 3{,}569$. Отображение, соответствующее значению λ_∞, имеет инвариантное множество канторовского типа F, окруженное бесконечным числом неустойчивых циклов периодов 2^n. При этом все точки отрезка [0; 1], кроме точек этих циклов и их прообразов, притягиваются к множеству F. Подсчитана фрактальная размерность этого аттрактора; она равна ~0,538. Универсальность, обнаруженная Фейгенбаумом, проявляется также в том, что структура аттрактора, возникающего при завершении каскада бифуркаций удвоения периода, в

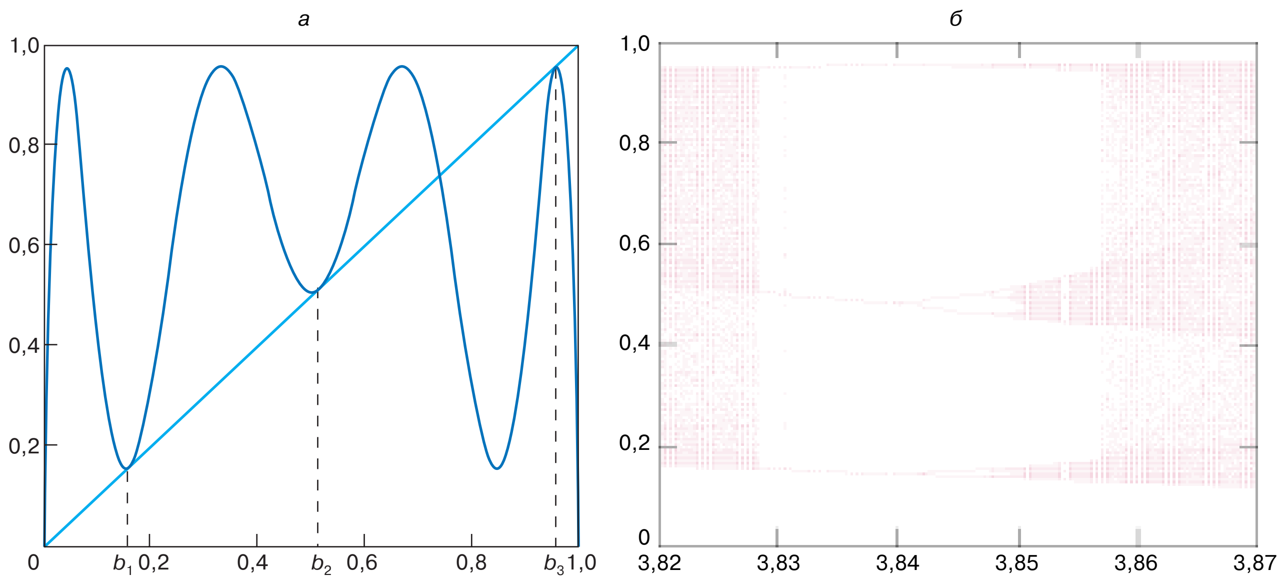

Рис. 4. *а* – график итерации $f_\lambda^{(3)}$ при $\lambda = 3{,}83$. Неподвижные точки b_1, b_2 и b_3 образуют цикл периода 3 функции f_λ; *б* – часть бифуркационной диаграммы, изображенной на рис. 3 для значений параметра вблизи $\lambda = 3{,}83$: хорошо заметен цикл периода 3

частности его фрактальная размерность, одинакова для всех типичных однопараметрических семейств. В следующем пункте мы встретимся с похожим инвариантным множеством при значениях $\lambda > 4$.

При дальнейшем увеличении параметра λ до значения $\lambda = 4$ динамика логистической функции является весьма сложной и не до конца изученной. Например, в окрестности точки $\lambda \approx 3{,}83$ можно обнаружить цикл периода 3 (рис. 4). Известна теорема А.Н. Шарковского [2], согласно которой, если функция имеет цикл периода 3, то она имеет циклы всех периодов, что само по себе свидетельствует о сложности поведения динамической системы.

4. СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И ХАОС

Пусть $\lambda > 4$. При таких значениях λ график функции f_λ не помещается в единичном квадрате $\{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$, и поэтому на интервале (0; 1) существуют точки x_0 и x_1, такие, что $f_\lambda(x_0) = f_\lambda(x_1) = 1$ (рис. 5). Пусть $I_0 = [0; x_0]$, $I_1 = [x_1; 1]$. Легко видеть, что функция f_λ отображает отрезки I_0 и I_1 строго на отрезок [0; 1].

Из теоремы о промежуточном значении легко вывести следующее утверждение.

Теорема. *Если образ отрезка I под действием определенной на нем непрерывной функции содержит отрезок I, то функция имеет неподвижную точку на отрезке I.*

Доказательство этой теоремы может быть проиллюстрировано рисунком 5: функция f_λ имеет по одной неподвижной точке на каждом из отрезков I_0 и I_1.

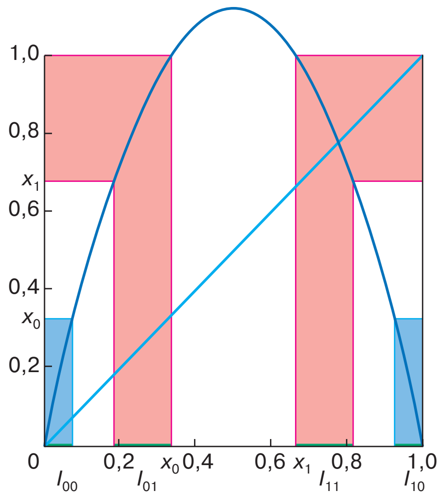

Рис. 5. График функции $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ при $\lambda = 4{,}5$. Отрезки $I_0 = [0; x_0]$ и $I_1 = [x_1; 1]$ переходят в отрезок [0; 1]. Отрезки I_{00}, I_{01}, I_{10} и I_{11} переходят в отрезок [0; 1] под действием второй итерации отображения f_λ

Теперь отметим точки x_0 и x_1 на единичном отрезке оси ординат. Прообраз объединения отрезков $I_0 \cup I_1$ при отображении f_λ состоит из четырех отрезков I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}. Каждый из этих отрезков функция $f_\lambda^{(2)}$ отображает на отрезок [0; 1] и, следовательно, имеет на нем неподвижную точку. Отсюда, в частности, следует наличие у функции f_λ цикла периода 2.

Продолжим этот процесс дальше по индукции. Прообраз при отображении f_λ объединения отрезков $I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11}$ состоит из вдвое большего количества отрезков, которые получаются из предыдущих выбрасыванием некоторого интервала в центральной части каждого из них. Каждый из полученных восьми отрезков взаимно однозначно отображается на отрезок [0; 1] итерацией $f_\lambda^{(3)}$. Отсюда следует, что отображение f_λ имеет цикл периода 3.

Этот процесс может быть продолжен до бесконечности. Объединение всех 2^n отрезков, полученных на n-м шаге, обозначим через F_n:

$$F_1 = I_0 \cup I_1, \qquad F_2 = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{11} \cup I_{10}, \ldots$$

Итерация $f_\lambda^{(n)}$ отображает каждый такой маленький отрезок на отрезок [0; 1] и, следовательно, имеет цикл периода n. Заметим, что интервалы, выбрасываемые на каждом шаге построения множества F, состоят из тех точек, образы которых однажды уходят за пределы отрезка [0; 1] и больше не возвращаются. Поэтому пересечение $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ состоит как раз из тех точек, которые остаются на отрезке [0; 1] под действием любой итерации f_λ.

Построение множества F аналогично построению канторова совершенного множества, когда из отрезка [0; 1] выбрасывается его средняя треть, затем из каждого оставшегося отрезка опять выбрасывается его средняя треть и т.д. Эта конструкция описана, например, в [3]; там же вычисляется фрактальная размерность канторова множества, которая не является целым числом. Множество F обладает свойствами, аналогичными свойствам канторова совершенного множества: оно замкнуто и ограничено, не содержит интервалов, любая его точка является предельной, оно имеет нецелую фрактальную размерность, а значит, является фракталом.

При дополнительном ограничении на λ можно показать, что длины отрезков из F_n стремятся к нулю при $n \longrightarrow \infty$. Решая уравнения $|f'_\lambda(x_0)| = |f'_\lambda(x_1)| = 1$, получаем $\lambda = 2 + \sqrt{5}$. Поэтому при $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ с учетом убывания производной $|f'_\lambda(x)|$ ($f''_\lambda(x) = -2r < 0$) получаем оценку $|f'_\lambda(x)| \ge \dfrac{1}{q} > 1$ на F_1 и, следовательно, на F.

Пользуясь теоремой о конечных приращениях, как в разделе 1, получаем, что длины всех отрезков из F_n не превосходят q^n, где $q < 1$. Далее будем предполагать, что $\lambda > 2 + \sqrt{5}$.

Так как все точки, не принадлежащие множеству F, уходят на бесконечность под действием итераций функции f_λ, то в дальнейшем ограничимся исследованием нашей динамической системы на множестве F. Инструмент, с помощью которого будем производить это исследование, есть символическая динамика, когда действие динамической системы представляется в виде манипуляций с некоторыми символами.

Каждой точке $x \in F$ поставим в соответствие последовательность из нулей и единиц $s_0s_1...s_n...$ следующим образом. Если точка $x \in I_0$, то положим $s_0 = 0$, а если $x \in I_1$, то положим $s_0 = 1$. Далее, $s_n = 0$, если $f_\lambda^{(n)}(x) \in I_0$, и $s_n = 1$, если $f_\lambda^{(n)}(x) \in I_1$.

Итак, каждой точке $x \in F$ ставится в соответствие ее "судьба" $s = s_0s_1...s_n...$ – последовательность из нулей и единиц.

Обратно, каждой последовательности $s = s_0s_1...s_n...$ из нулей и единиц соответствует некоторая точка из множества F, притом единственная. Действительно, каждой такой последовательности соответствует последовательность вложенных отрезков

$$I_{(1)} \supset I_{(2)} \supset ... \supset ... I_{(n)} \supset ...,$$

такая, что $I_{(n)}$ – один из 2^n отрезков, составляющих F_n. Поскольку длины этих отрезков стремятся к нулю, то, как известно, пересечение такой последовательности отрезков состоит из единственной точки x, которая к тому же принадлежит F, поскольку она принадлежит F_n при любом n.

Когда функция f_λ действует на элементы множества F, судьбы его элементов как-то преобразуются. Оказывается, действие отображения f_λ на F сопровождается чрезвычайно простым изменением судеб: для того чтобы узнать судьбу образа $f_\lambda(x)$ элемента $x \in F$, достаточно «забыть» первый элемент судьбы точки x:

$$S\colon s_0s_1...s_n... \longrightarrow s_1...s_n...$$

Действительно, если судьба x есть $s_0s_1...s_n...$, а судьба $f_\lambda(x)$ есть $p_0p_1...p_n...$, то, по определению, s_n и p_n

$$s_n = \left\{\begin{array}{lll} 0, & \text{если} & f_\lambda^{(n-1)}(f_\lambda(x)) \in I_0 \\ 1, & \text{если} & f_\lambda^{(n-1)}(f_\lambda(x)) \in I_1 \end{array}\right\} = p_{n-1}.$$

Таким образом, исследование динамики логистической функции на множестве F сводится к исследованию поведения отображения сдвига S на множестве последовательностей из нулей и единиц.

При построении множества F было уже отмечено одно замечательное свойство функции f_λ: она имеет циклы всех периодов. Мы можем еще раз в этом убедиться, используя символическую динамику. В самом деле, любой периодической последовательности s (с периодом k) соответствует периодическая точка x, поскольку из условия периодичности $s_{n+k} = s_n$ для любого n следует, что точки $f_\lambda^{(k)}(x)$ и x имеют одинаковую судьбу и, следовательно, совпадают. Например, периодической последовательности, состоящей из одних нулей, соответствует неподвижная точка $x_1 = 0$; вторая неподвижная точка x_2 имеет судьбу, состоящую из одних единиц.

Прежде чем обнаружить некоторые другие замечательные свойства отображения S и, следовательно, f_λ, обсудим вопрос: как связаны между собой точки, имеющие одинаковый начальный отрезок судьбы?

Пусть судьбы двух точек x и y совпадают до элемента s_n. Это означает, что до n-го шага построения множества F эти точки все время попадали на один и тот же отрезочек в множестве F_k, $k \le n$. Поскольку длина каждого из 2^n маленьких отрезков в множестве F_n не превосходит q^n, то и расстояние между x и y не превосходит этой малой (при больших n) величины. Таким образом, чем дольше совпадают судьбы двух точек, тем ближе эти точки друг к другу. Верно и обратное: близким точкам соответствуют судьбы, совпадающие до некоторого момента.

Возьмем произвольную конечную, но очень длинную последовательность из нулей и единиц и допишем ее двумя произвольными способами до бесконечности. Тогда точки, соответствующие двум полученным судьбам, очень близки между собой, но в финале под воздействием итераций функции f_λ могут оказаться как угодно далеко друг от друга или вообще повести себя как-нибудь очень сложно.

Таким образом, в нашей динамической системе проявляется один из признаков хаоса: *как угодно малое изменение начальных условий может непредсказуемым образом повлиять на финальное поведение точки.*

Примером сложного финального поведения может служить орбита, всюду плотная в множестве F, то есть такая, точки которой содержатся в любой окрестности любой точки множества F. Судьба орбиты такой точки строится следующим образом. Для каждого $n \ge 1$ выпишем подряд всевозможные наборы из нулей и единиц, содержащие n элементов. Полученные конечные последовательности расположим одну за другой в порядке возрастания n. Орбита с описанной судьбой всюду плотна в F, поскольку любой начальный отрезок судьбы произвольной точки из F обязательно встретится где-то в этой последовательности. Тогда, если «забыть» все предыдущие цифры (или, что то же самое, сделать несколько, быть может очень много, итераций функции f_λ), то получится точка орбиты, которая находится от рассматриваемой точки множества F на расстоянии меньше заданного.

Из существования всюду плотной орбиты вытекает, что с помощью итераций функции f_λ мы можем попасть из окрестности одной заранее заданной точки F в окрестность другой заранее заданной точки. Другими словами, функция f_λ хорошо перемешивает множество F.

Еще одним признаком хаотического поведения является тот факт, что периодические точки f_λ всюду плотны в F, то есть как угодно близко от любой точки из F имеются периодические точки f_λ. Действительно, выбирая любое число n, рассмотрим $(n + 1)$-й отрезок судьбы данной произвольной точки из F и будем повторять этот отрезок периодически. Полученная периодическая последовательность соответствует периодической точке, которая находится на расстоянии от рассматриваемой точки F не более q^n.

Можно показать, хотя это и сложнее, что при $4 \le \lambda \le 2 + \sqrt{5}$ логистическая функция также обнаруживает хаотическое поведение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время число публикаций, посвященных явлениям хаоса в детерминированных системах, стремительно растет, поэтому за более широкой и подробной информацией мы отсылаем читателя к специальной и популярной литературе. В статье [4], например, популярно излагается пример двумерного отображения – подковы Смейла, который в свое время стал сенсацией в теории динамических систем. В книге [5] и статье [6] читатель найдет обширный перечень систем различной природы, допускающих хаотические колебания, их математические модели, а также описания численных и физических экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белых В.Н.* Элементарное введение в качественную теорию и теорию бифуркаций динамических систем // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 1. С. 115–121.
2. *Шарковский А.Н.*, *Коляда С.Ф.*, *Спивак А.Г.*, *Федоренко В.В.* Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989. 216 с.
3. *Вишик М.И.* Фрактальная размерность множеств // Соросовский Образовательный Журнал. 1998. №1. С. 122–127.
4. *Ильяшенко Ю.*, *Котова А.* Подкова Смейла // Квант. 1994. № 1. С. 15–19.
5. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 312 с.
6. *May R.M.* Simple Mathematical Model with Very Complicated Dynamics // Nature. 1976. Vol. 261. P. 459–467.

Рецензент статьи В.Б. Колмановский

* * *

Наталия Борисовна Медведева, кандидат физико-математических наук, доцент Челябинского государственного университета. Область научных интересов – обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы. Автор около 20 научных статей и одного учебного пособия.