

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ

С. Е. СТЕПАНОВ

Владимирский государственный педагогический университет

GEODESIC LINES

S. E. STEPANOV

One of the objects of classical differential geometry – geodesics – are explained. Local properties of geodesics and present examples of their applications in the non-Euclidean geometry, General Relativity and geodesy are considered.

Рассмотрен один из объектов классической дифференциальной геометрии – геодезические линии. Описаны локальные свойства и указаны их возможные приложения в неевклидовой геометрии, релятивистской физике и геодезии.

www.issep.rssi.ru

ВВЕДЕНИЕ

На кривой поверхности геодезические линии, заменяя прямые, позволяют строить геометрию так, как это делается на плоскости.

Статья знакомит с основами теории геодезических (см., например, [1]) на примерах результатов, полученных известными учеными в прошлом, и современных достижениях.

**ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ
НА СФЕРЕ, ЦИЛИНДРЕ
И ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКАХ**

Вплоть до XVI века люди думали, что живут на евклидовой плоскости E_2 . Это заблуждение позволяло им считать, что большие расстояния они измеряют отрезками прямых (кратчайшими – по определению Архимеда), и пользоваться на местности теоремами геометрии Евклида, в частности известной теоремой Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$ для прямоугольного треугольника с катетами a , b и гипотенузой c .

Но если верить преданиям, начиная с конца V века до Рождества Христова (до н.э.) греческие философы и астрономы (и среди них хорошо известный нам философ и математик Пифагор) высказывали предположения о шарообразности Земли, а в III веке до н.э. многогранный греческий ученый Эратосфен Киренский с большой степенью точности вычислил длину окружности земного шара. В то же время выделилась в самостоятельную науку и получила свое современное название геодезия. Последняя изучала методы измерений на земной поверхности и определения размеров земного шара, что было необходимо для составления географических карт, в которых нуждались торговля, мореплавание и военное дело.

Оказавшись на сфере S_2 , люди поняли, что отрезки прямых, которыми они измеряли большие расстояния, являются дугами окружностей земного радиуса $R \approx 6378$ км, а теореме Пифагора для больших расстояний надо использовать в ее сферическом варианте

$$\cos \frac{c}{R} = \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R}.$$

Для доказательства того, что на дуге $\gamma \approx M_1M_2$ окружности большого радиуса сферы S_2 реализуется минимум расстояния между двумя произвольными точками M_1 и M_2 , рассмотрим эту окружность как линию Γ пересечения сферы S_2 с плоскостью E_2 , проходящей через ее центр. Тогда отражение f пространства E_3 относительно плоскости E_2 будет для сферы S_2 сохраняющим расстояние преобразованием $f: S_2 \rightarrow S_2$ с множеством неподвижных точек $\Gamma = S_2 \cap E_2$.

Пусть наши точки M_1 и M_2 соединяет на S_2 другая дуга γ' длины меньшей, чем длина γ . Так как M_1 и M_2 — неподвижные точки преобразования f , сохраняющего расстояние, то $f(\gamma')$ будет кривой, которая соединяет точки $f(M_1) = M_1$ и $f(M_2) = M_2$, той же длины, что и γ' . Следовательно, $f(\gamma') = \gamma'$. Отсюда вытекает, что $\gamma' \subset S_2 \cap E_2$.

Наконец, через каждую точку S_2 в любом направлении проходит окружность большого радиуса, поэтому других кривых, «минимизирующих расстояние» между двумя любыми точками, на S_2 нет.

Если при этом дуга M_1M_2 окружности большого радиуса имеет длину, большую πR , то для измерения расстояния надо выбирать вторую дугу той же окружности. Поскольку в первом случае (рис. 1) можно найти линию, соединяющую точки M_1 и M_2 , длины меньшей πR . Вторая из двух дуг окружности большого радиуса будет кратчайшей, и ее длиной будет измеряться расстояние между точками M_1 и M_2 . При этом сама окружность большого радиуса называется геодезической линией сферы S_2 .

Зададимся вопросом: как обстоит дело с измерением расстояния между точками на других известных нам поверхностях?

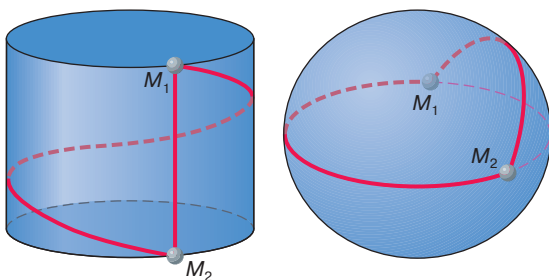


Рис. 1. На сфере радиуса R , кроме дуги M_1M_2 окружности большого радиуса, если ее длина превосходит πR , найдутся и более короткие дуги. На цилиндре, кроме отрезка винтовой кривой, соединяющей точки M_1 и M_2 , имеются и более короткие. Например, отрезок M_1M_2 прямолинейной образующей

Например, на цилиндре расстояние между двумя любыми точками M_1 и M_2 измеряется длинами отрезков прямолинейных образующих, дуг круговых сечений и винтовых линий, соединяющих эти точки. Для доказательства разрежем цилиндр по одной из его прямолинейных образующих, а затем изогнем на плоскость E_2 . В результате прямолинейные образующие не претерпят никаких изменений, длины же дуг названных кривых сохранятся, но сами дуги станут отрезками прямых линий (рис. 2). Поэтому отрезок прямой, соединяющий точки M_1 и M_2 , после восстановления цилиндра в прежнем виде предстанет в виде кратчайшей — отрезка прямолинейной образующей, дуги кругового сечения или винтовой линии (см. рис. 2). Все эти кривые носят название геодезических линий цилиндра.

Для вычисления расстояния между двумя точками на поверхности выпуклого многогранника поступают аналогичным образом. А именно, рассматривается развертка многогранника и две данные точки соединяются кратчайшей, которая состоит из прямолинейных отрезков в гранях развертки. Так, например, в случае куба выбирают из одиннадцати различных его разверток ту, которая позволяет соединить заданные наперед точки отрезком прямой.

Окружности большого радиуса сферы S_2 и круговые сечения цилиндра относятся к так называемому классу замкнутых кривых, каждая из которых без изломов возвращается к исходной точке и не пересекает саму себя. Таким образом, на сфере через каждую точку проходит бесчисленное множество замкнутых геодезических, на цилиндре же — только одна.

Как будут выглядеть замкнутые геодезические на выпуклых многогранниках? Ответ на этот вопрос проще дать на примере куба. Замкнутую геодезическую куба будем рассматривать как многоугольник минимального периметра, каждая сторона которого лежит в своей

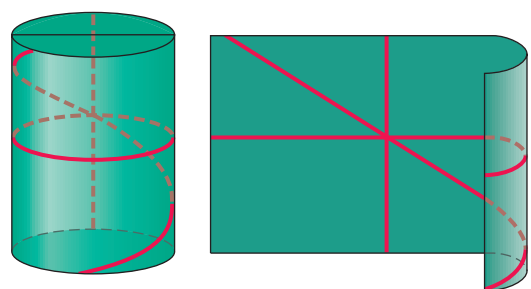


Рис. 2. Если развернуть цилиндр на плоскость, то отрезками прямых линий станут отрезки его прямолинейных образующих, параллели и дуги винтовых кривых

грани куба. Очевидно, что три семейства таких геодезических лежат на плоскостях, параллельных граням куба. Элементарные вычисления (см. [2]) позволяют заключить, что имеется еще четыре семейства замкнутых геодезических, которые имеют вид шестиугольников со сторонами, параллельными диагоналям граней куба. Таким образом, через каждую точку куба проходят четыре различные замкнутые геодезические.

Заметим, что в общей постановке вопрос о существовании на той или иной поверхности замкнутых геодезических очень сложный. Его изучению посвящено множество статей и даже монография (см. [3]). Например, одним из последних результатов в общей теории относительности было доказательство существования в пространстве–времени Эйнштейна замкнутой времениподобной геодезической, получившей образное название «машина времени».

Подводя промежуточные итоги от примеров, перейдем к более общим понятиям и фактам, известным математикам.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ И ИХ СВОЙСТВА

Будем рассматривать только те куски поверхностей, которые состоят из регулярных точек (см. [4]), а из всех кривых на них ограничимся гладкими.

В дифференциальной геометрии (см. [4]) кривую Γ , соединяющую на поверхности две произвольные точки M_1 и M_2 , принято называть *кратчайшей*, если ее длина наименьшая среди всех кривых с теми же концами.

Отметим, что этот термин, заимствованный у Архимеда, встречается в изданном в 1794 году втором томе «Основ геометрии» М.А. Лежандра при определении им прямой на плоскости. При этом как на плоскости, так и на поверхности расстояние между точками M_1 и M_2 измеряется длиной кратчайшей.

Гладкая кривая на поверхности называется *геодезической*, если каждая ее достаточно малая дуга является кратчайшей. Очевидно, что каждая кратчайшая является геодезической линией, но обратное, вообще говоря, неверно. Все рассмотренные нами на сфере, цилиндре и выпуклых многогранниках кривые являются примерами геодезических.

На примерах этих кривых непосредственно проверяются общие свойства геодезических.

Свойство 1. *На всяком достаточно малом куске поверхности можно провести через две точки одну и только одну дугу геодезической линии, так же как и на плоскости E_2 через две точки можно провести одну и только одну соединяющую их прямую линию.*

Действительно, зная две точки M_1 и M_2 сферы S_2 и ее центр — точку O , можно провести плоскость E_2 , про-

ходящую через эти три точки. Тогда $\Gamma = S_2 \cap E_2$ будет той единственной геодезической, которая проходит через точки M_1 и M_2 .

В случае цилиндра его надо разрезать по прямолинейной образующей, развернуть на плоскость и соединить точки M_1 и M_2 отрезком прямой, который при возвращении цилиндра в первоначальное состояние станет отрезком геодезической линии. При этом разрез из двух возможных здесь случаев надо произвести таким образом, чтобы отрезок был самым коротким.

Свойство 2. *На всяком куске поверхности можно построить угол с геодезическими сторонами таким же образом и так же его переносить, как угол с прямолинейными сторонами на плоскости E_2 .*

Это свойство в первой своей части для сферы и цилиндра очевидно. Относительно второй заметим, что движение на сфере осуществляется за счет вращения пространства вокруг ее центра, а на цилиндре — за счет параллельных переносов пространства в направлении его прямолинейных образующих, поворотов пространства в плоскостях, перпендикулярных этим образующим, и, наконец, композиций этих преобразований.

Свойство 3. *Гладкая кривая на поверхности является геодезической тогда и только тогда, когда она обладает параллельным полем касательных прямых.*

Это свойство позволяет рассматривать геодезические линии на поверхностях аффинного пространства (см. [4]).

Докажем это свойство, как и раньше, на примере геодезических линий на сфере и цилиндре. Действительно, касательные к окружности большого радиуса $\Gamma = S_2 \cap E_2$ и нормали сферы S_2 лежат в одной и той же плоскости E_2 . Поэтому все касательные в силу специфики операции параллельного перенесения прямых на поверхности (см. [4]) образуют параллельное поле прямых вдоль Γ .

С другой стороны, при изгибании на плоскость цилиндра дуги его геодезических превращаются в отрезки прямых, поэтому касательные прямые, проведенные в точках дуг геодезических линий цилиндра, после его изгибания сольются. На этом основании заключаем, что касательные к винтовым кривым и круговым сечениям цилиндра образуют параллельные поля прямых.

ОТ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ К. ГАУССА К ОТКРЫТИЮ Э. БЕЛЬТРАМИ

Дальнейшие геодезические исследования привели к выводу, что Земля имеет более сложную форму, чем шар. И поскольку дуги окружностей радиуса $R \approx 6378$ км уже не могли служить кратчайшими на земной поверхности, снова возник интерес к геодезии.

Более десяти лет своей жизни (примерно с 1820 по 1830 год) посвятил геодезии К. Гаусс. Это было связано с полученным им поручением произвести геодезическую съемку Ганноверского королевства и составить его детальную карту для военных целей. Гений великого ученого проявился в том, что он не только организовал практически это сложное предприятие, но и фактически создал науку, которая носит название высшей геодезии и имеет своей задачей установление формы земной поверхности не в упрощенном, а в действительном ее виде.

Изучение формы земной поверхности потребовало углубленного общего геометрического метода исследования поверхностей. Выдвинутые Гауссом в этой области идеи получили выражение в его сочинении “Общие изыскания о кривых поверхностях”, опубликованном в 1828 году.

Практические соображения и тонкий теоретический анализ привел Гаусса к формуле

$$\Delta s^2 = E\Delta x^2 + 2F\Delta x\Delta y + G\Delta y^2 \quad (1)$$

вычисления расстояния между двумя достаточно близкими точками поверхности – формуле, которая является обобщением теоремы Пифагора на плоскости (см. [4]).

Зная формулу (1), можно поставить задачу о нахождении гладкой кривой $\Gamma: x = x(t), y = y(t)$ для $t_1 \leq t \leq t_2$, соединяющей достаточно близкие точки M_1 и M_2 поверхности, длина которой была бы наименьшей среди всех линий, соединяющих эти точки. Очевидно, что искомая кривая будет геодезической.

Решение этой задачи сводится к поиску решения следующей системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} x'' + A_1(x')^2 + B_1x'y' + C_1(y')^2 &= 0, \\ y'' + A_2(x')^2 + B_2x'y' + C_2(y')^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где функции A_1, \dots, C_2 известным образом выражаются через E, F, G и их производные. В частности, когда на поверхности задана сеть Чебышева координатных линий (см. [4]), система дифференциальных уравнений (2) принимает вид

$$\begin{aligned} x'' + \cos\alpha \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)(x')^2 - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)(y')^2 &= 0; \\ y'' + \cos\alpha \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)(y')^2 - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)(x')^2 &= 0, \end{aligned}$$

где $\alpha = \alpha(x, y)$ – угол между линиями сети Чебышева в точке поверхности $M(x, y)$, а $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$ и $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$ – производные от функции $\alpha = \alpha(x, y)$ по переменным x и y соответственно.

Для $\alpha = \pi/2$ поверхность становится (см. [4]) изометричной плоскости E_2 , а уравнения системы принимают вид $x'' = 0, y'' = 0$. Откуда находим $x = at + b$ и $y = ct + d$ для произвольных постоянных a, b, c и d . Исключая из этих двух равенств параметр t , в качестве уравнения геодезической получаем хорошо известное уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, что для плоскости E_2 факт очевидный.

Возвращаясь к системе дифференциальных уравнений (2), введем новые переменные $u = x'$ и $v = y'$. В результате чего сведем нашу систему из двух уравнений второго порядка к системе четырех уравнений первого порядка. Такая система дифференциальных уравнений при начальных условиях

$$x_1 = x(t_1), \quad y_1 = y(t_1)$$

на координаты x_1 и y_1 точки M_1 поверхности и

$$p_1 = x'(t_1), \quad p_2 = y'(t_1)$$

на координаты вектора \vec{p} , касательного к поверхности в этой точке, имеет единственное решение.

Образно говоря, едущий по поверхности гоночный автомобиль, проезжая точку M_1 со скоростью \vec{p} , смог бы продолжить свой путь на поверхности прямым образом, оставляя за собой след в виде геодезической линии.

В результате установлено еще одно свойство геодезических.

Свойство 4. *Через любую точку регулярной поверхности во всяком направлении проходит и притом единственная геодезическая.*

На основании формулы (1) Гаусс нашел способ вычисления на поверхности величины угла α между двумя кривыми как угла между касательными к этим кривым в их точке пересечения. В дальнейшем на основании этой формулы он доказал теорему

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \iint_S K dS \quad (3)$$

для $dS = \sqrt{EG - F^2} dx dy$, выражающую сумму углов треугольника ABC , сторонами которого служат дуги геодезических линий поверхности, через π с некоторой поправкой, положительной на поверхности положительной полной кривизны ($K > 0$) и отрицательной на поверхности отрицательной полной кривизны ($K < 0$). Эта поправка пропорциональна площади S_{ABC} куска поверхности, ограниченного геодезическим треугольником ABC . Так, в частности, для сферы S_2 радиуса R имеем

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{1}{R^2} S_{ABC}$$

и для псевдосферы (см. [4])

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - \frac{1}{R^2} S_{ABC}.$$

Из последнего равенства с очевидностью следует, что сумма внутренних углов геодезического треугольника на псевдосфере меньше π . Но это же и для плоскости Лобачевского L_2 является фундаментальным фактом (см. [4])!

Теорема (3) подсказала Бельтрами возможность построения «в малом» на поверхностях постоянной отрицательной полной кривизны геометрии Лобачевского с геодезическими в качестве прямых линий. Такая интерпретация Бельтрами плоскости L_2 доказывала, что в геометрии Лобачевского нет внутренних противоречий, потому что в противном случае такие противоречия должны были сказаться в обычной теории поверхностей.

К сожалению, сочинения Э. Бельтрами были опубликованы между 1860 и 1870 годами, уже после смерти нашего гениального соотечественника Н.И. Лобачевского. Появись они раньше — и судьба Н.И. Лобачевского как ученого сложилась бы иначе.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В геодезии при составлении карт важное значение имеет геодезическое отображение. При таком отображении геодезические линии одной поверхности переходят в геодезические линии другой.

Для примера рассмотрим отображение поверхностей с сохранением длины — изометрию. Поскольку геодезическое расстояние между двумя точками при этом отображении должно быть равно геодезическому расстоянию между образами точек, то такое отображение должно переводить геодезические линии в геодезические же.

Отображение, осуществляемое путем изгибания цилиндра на плоскость, является частным видом изометрии. При изгибании цилиндра на плоскость E_2 геодезические линии цилиндра превращаются в отрезки прямых линий плоскости, которые там играют роль геодезических. Правда, если представлять цилиндр как поверхность неограниченно продолжаемую, то его винтовые кривые, совершающие бесчисленное число витков, будут разрезаны на бесчисленное множество дуг, каждая из которых при изгибании станет отрезком своей прямой линии. Поэтому в этом случае принято говорить о локальном геодезическом отображении цилиндра на плоскость (см. рис. 2).

Рассмотрим пример локально геодезического отображения сферы S_2 на евклидову плоскость E_2 , которое не является изометрическим.

Пусть сфера S_2 лежит на плоскости E_2 и S'_2 — ее нижняя открытая полусфера, то есть полусфера без ограничивающей ее окружности. Геодезическими линиями полусферы S'_2 по-прежнему будут дуги окружностей большого радиуса сферы S_2 . Тогда для любой дуги $\gamma \subset S'_2$, которая является дугой окружности большого радиуса сферы S_2 , всегда найдется плоскость E'_2 такая, что $\gamma = E'_2 \cap S'_2$. Прямую линию l , которую мы поставим в соответствие γ , определим условием $l = E'_2 \cap E_2$.

При этом важно отметить, что «в целом» сфера S_2 не допускает геодезического отображения на плоскость E_2 .

Как нам известно (см. [4]), сфера S_2 является примером поверхности постоянной полной кривизны. Оказывается, что только поверхности постоянной полной кривизны и среди них сфера допускают локальные геодезические отображения на плоскость E_2 . Это, в частности, следует из теоремы более общего содержания, которую доказал в 1868 году Э. Бельтрами.

Теорема Бельтрами. *Единственные поверхности, которые допускают локальные геодезические отображения на поверхности постоянной полной кривизны, также являются поверхностями постоянной полной кривизны.*

Годом позже У. Дини, изучая задачу динамики о преобразованиях уравнений движения механических систем, сохраняющих траектории, доказал, что справедлива следующая

Теорема Дини. *Две неизометричные поверхности допускают локальное геодезическое отображение тогда и только тогда, когда расстояние между их достаточно близкими точками можно вычислять по формулам*

$$\Delta s^2 = (f(x) + \varphi(y))(\Delta x^2 + \Delta y^2)$$

на первой поверхности и

$$\Delta s^2 = -\left(\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{\varphi(y)}\right)\left(\frac{\Delta x^2}{f(x)} - \frac{\Delta y^2}{\varphi(y)}\right)$$

на второй.

Через 27 лет после опубликования этого результата Т. Леви-Чивита дал общее решение проблемы геодезических отображений пространств трех и более измерений. По форме это была обобщенная теорема У. Дини. И наконец, спустя более чем сто лет после теоремы Э. Бельтрами задача о локальном геодезическом отображении была решена полностью в работе [5] профессора Казанского университета А.В. Аминовой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория геодезических линий и геодезических отображений интересна с прикладной точки зрения и для современных исследований, поскольку движение многих типов механических систем, а также тел или частиц в гравитационных и электромагнитных полях, в сплошной среде часто происходит по траекториям, которые можно рассматривать как геодезические линии некоторых пространств трех и более измерений, определяемых энергетическими режимами, при которых протекают процессы.

На этом основании два пространства, допускающие геодезическое отображение друг на друга, описывают процессы, протекающие при эквивалентных внешних нагрузках по одним и тем же “траекториям”, но при различных энергетических режимах. Следовательно, один из этих процессов можно моделировать с помощью другого. Некоторые аспекты этого изложены в уже цитированной статье [5] и монографии [6] известного своими исследованиями в общей теории относительности профессора Казанского университета А.З. Петрова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бузман Г. Геометрия геодезических. М.: Физматгиз, 1962.
2. Штейнгауз Г. Сто задач. М.: Наука, 1980.
3. Клингенберг В. Лекции о замкнутых геодезических. М.: Мир, 1982.
4. Степанов С.Е. О кройке одежды по П.Л. Чебышёву // Соросовский Образовательный Журнал. 1988. № 7. С. 122–127.
5. Аминова А.В. Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими // Успехи матем. наук. 1993. Т. 48, вып. 2. С. 107–164.
6. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.

Рецензент статьи Ю.П. Соловьев

* * *

Сергей Евгеньевич Степанов, доктор физико-математических наук, доцент Владимирского государственного педагогического университета. Область научных интересов – глобальная риманова и лоренцева геометрии и теория поля. Автор более 40 научных статей и соавтор двух коллективных монографий.