# О ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

**Л. И. МАНЕВИЧ**

*Московский физико-технический институт, Долгопрудный Московской обл.*

**CATASTROPHE THEORY**

L. I. MANEVITCH

*Understanding some new aspects of extremum problems has become a starting point for the development of a specific field of mathematical and scientific knowledge treating the qualitative changes in the behavior of different systems which depend on the governing parameters.*

*Осознание важных аспектов задач на минимум и максимум, которые долгое время оставались вне поля зрения математиков и физиков, стало побудительным мотивом для формирования обобщающей области математического и естественнонаучного знания, развитие которой направлено на изучение качественных трансформаций в различных системах при изменении управляющих параметров.*





## ВВЕДЕНИЕ

Чрезвычайная общность развитых И. Ньютоном и Г.В. Лейбницем методов была для их современников одной из самых впечатляющих черт математического анализа. Возможность провести касательную в точке произвольной гладкой кривой и рассчитать площади фигур (объемы тел), ограниченные гладкими или кусочно-гладкими кривыми (поверхностями), казалась поразительной после весьма ограниченных успехов греческой математики в этой области.

При всей их общности методы математического анализа были ориентированы на исследование плавных процессов, простейшие из которых – стационарные равновесные состояния – соответствуют решениям задач на экстремум (максимум или минимум). Конечно, и в XVIII веке были известны многочисленные примеры резкого изменения поведения различных систем, когда одно стационарное состояние сменяется другим или исчезает стационарный режим. Но никаких обобщающих математических идей, направленных специально на изучение подобных трансформаций, тогда выдвинуто не было. Уже в середине XVIII века было найдено грандиозное обобщение задач на экстремум, составившее содержание вариационного исчисления, в котором роль точек играют кривые, а роль функций – определенные интегралы, зависящие от этих кривых. Но не менее грандиозное обобщение задач на экстремум, которое охватывает случаи резкого изменения стационарного поведения систем, описываемых нелинейными алгебраическими уравнениями, было сформулировано лишь через два века. Причина такого временнóго сдвига состоит, по-видимому, в том, что в течение длительного времени не были осознаны некоторые важные аспекты задач на минимум и максимум, которые при их осмыслении только и могли привести к обобщению, получившему название "теория катастроф". В первой части статьи мы кратко обсудим эти аспекты.

Общий математический подход к исследованию резких, качественных изменений тогда отсутствовал, однако импульсы, идущие от механики и физики, побуждали к рассмотрению конкретных задач такого рода

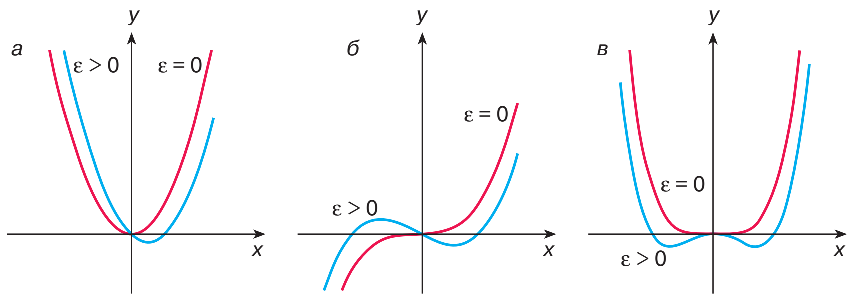


**Рис. 1.** Деформация функций в окрестности критической точки при изменении параметра

и нахождению путей их анализа. Решение каждой подобной задачи составляло самостоятельную проблему аналогично тому, как обстояло дело в Древней Греции с вычислением площадей (объемов) геометрических фигур (тел). За два века был накоплен огромный опыт исследования резких изменений в различных физических системах, тесно связанный с формированием понятий устойчивости и неустойчивости равновесия (более всего это относится к механике). Мы попытаемся на конкретных примерах дать представление об этом опыте и инициированных им идеях. Наконец, учитывая, что многие трудности, возникшие в задачах устойчивости, удавалось успешно преодолеть в рамках традиционных понятий и представлений об экстремальном поведении, естественно поставить вопрос: Чем же была вызвана к жизни разработка общего подхода, характерного для теории катастроф? Не имея возможности в рамках этой статьи ввести специальные математические понятия, мы все же сформулировали ответ на этот вопрос во второй ее части.

## СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ФУНКЦИЙ

Один из аспектов задач на экстремум, который долгое время оставался вне поля зрения математиков и физиков, тесно связан с современным понятием структурной устойчивости функций. Если мы рассмотрим, например, функции $y = x^2$, $y = x^3$ и $y = x^4$, то все они имеют нулевую первую производную в начале координат (в таких случаях говорят, что $x = 0$ – критическая точка). Первая и третья функции имеют в критической точке минимальное значение, а вторая – точку перегиба, и в традиционных рамках задач на экстремум это различие представляется наиболее важным. Но выберем несколько иную точку зрения. Попробуем слегка пошевелить рассматриваемые функции, введя слабые возмущения: 1) $y = x^2 - \varepsilon x$; 2) $y = x^3 - \varepsilon x$; 3) $y = x^4 - \varepsilon x^2$, где параметр ε может быть сколь угодно малым по величине (рис. 1). В результате такого возмущения в случае (1) никаких принципиальных изменений не происходит: сохраняется единственная критическая точка, которая лишь смещена на малую величину $x_0 = \varepsilon/2$, причем значение функции в этой точке (единственный минимум) изменяется на величину $y_0 = -\varepsilon^2/4$ (рис. 1, *а*). Во втором и третьем случаях ситуация совсем иная. Вторая функция, для которой начало координат было точкой перегиба, приобретает две экстремальные точки $x_{1,\,2} = \pm\sqrt{\varepsilon/3}$, одна из которых соответствует минимуму, а другая – максимуму (рис. 1, *б*). Функция $y = x^4$, имевшая единственный минимум в начале координат, в результате малого шевеления имеет уже три критические точки (рис. 1, *в*). При этом начало координат становится точкой максимума, а в двух новых критических точках, сколь угодно близких к точке $x = 0$, функция принимает минимальные значения.

Построение математической модели любого процесса связано с пренебрежением малыми членами. В нашем первом примере это вполне оправданно: учет малого отклонения функции от квадратной параболы приводит не к качественным, а к малым количественным изменениям. Во втором и третьем примерах поведение при учете малых поправочных членов качественно иное. Таким образом, функции $y = x^3$ и $y = x^4$, несмотря на то что вторая из них имеет экстремум, а первая нет, объединяет общее свойство, которое, не прибегая к строгим определениям, назовем структурной неустойчивостью. Этот термин отражает то, что при малом изменении структуры функции ее поведение в окрестности критической точки резко изменяется. Наоборот, функция $y = x^2$ структурно устойчива.

Свойство структурной устойчивости (неустойчивости) функции не было включено в арсенал математических понятий вплоть до 30-х годов XX века, когда оно впервые было сформулировано А.А. Андроновым (1901–1952). Через несколько десятилетий понятие о структурной устойчивости стало одним из ключевых для теории катастроф.

## БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

Казалось бы, в связи со сказанным структурно неустойчивые в критических точках функции непригодны для описания реальности. Но, как правило, функции, возникающие в физических приложениях, содержат некоторые параметры, значения которых могут изменяться в определенном диапазоне (подобно параметру ε в наших примерах). В таких случаях мы имеем дело с семейством функций, зависящим от параметра. Может случиться, что при изменении последнего с неизбежностью достигается значение (в нашем примере $\varepsilon = 0$), соответствующее структурно неустойчивой критической точке, которая тем самым приобретает вполне реальный смысл. Более того, именно эта точка, будучи одной из реализаций семейства критических точек, является наиболее важной, поскольку с ней связаны качественные изменения в поведении системы (подобные описанным выше).

Анализ семейств функций в связи с задачами на минимум и максимум также не стал предметом общематематических построений ни в XVIII, ни в первой половине XIX века. Только великий французский математик А. Пуанкаре увидел в таком анализе общематематическую проблему. В связи с его формулировкой этой проблемы возникло понятие “бифуркация”, также ставшее позднее одним из ключевых в теории катастроф. Термин “бифуркация” буквально означает “раздвоение”, но обычно применяется в более широком смысле для обозначения всевозможных качественных перестроек различных объектов при изменении параметров, от которых они зависят [1]. В примере с семейством $y = x^4 - \varepsilon x^2$ значение параметра $\varepsilon = 0$ соответствует также точке бифуркации, поскольку при переходе $\varepsilon$ от отрицательных значений к положительным единственное устойчивое стационарное состояние $x = 0$, становясь неустойчивым, дополняется парой устойчивых состояний $x = \pm\sqrt{\varepsilon/2}$. В примере же с семейством функций $y = x^3 - \varepsilon x$ при отрицательных $\varepsilon$ стационарные состояния вообще отсутствуют, а в точке $\varepsilon = 0$ происходит рождение пары таких состояний, одно из которых устойчиво, а второе неустойчиво. В обоих случаях значения $\varepsilon = 0$ соответствуют точкам бифуркации, хотя и различных типов.

Общая задача исследования точек бифуркации как математическая проблема состоит в их классификации и анализе поведения семейств функций вблизи структурно неустойчивых критических точек. Понятие бифуркации позволяет глубже проникнуть в сущность структурной неустойчивости, выявляя ее следствия.

Еще один, третий аспект задач на минимум и максимум, также тесно связанный со структурной неустойчивостью и решающим образом повлиявший на формирование теории катастроф, относится к понятию “особенность отображения”.

## ОСОБЕННОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ

Если во втором и третьем примерах расположить значения управляющего параметра $\varepsilon$ на прямой, то каждой точке этой прямой может соответствовать одна либо несколько критических точек – корней соответствующего уравнения или не соответствовать ни одна такая точка. Поэтому можно говорить об отображении множества значений управляющего параметра на множество критических точек (и наоборот). Во втором примере значениям параметра на отрицательной полуоси не соответствует ни одна критическая точка, а его значениям на положительной полуоси – две критические точки. В третьем примере на отрицательной полуоси отображение однозначно, а на положительной трехзначно. В обоих случаях на оси управляющего параметра точка бифуркации $\varepsilon = 0$ разделяет области с различным поведением критических точек.

На геометрическом языке можно говорить об особенностях отображения. Эти особенности связаны с наличием точек бифуркации, но достоинства геометрической трактовки проявляются уже при обобщении на функции одной или двух переменных, зависящие от нескольких существенных параметров (о критериях существенности речь пойдет во второй части статьи). Ясно, что при наличии, например, плоской или трехмерной области управляющих параметров границы между областями с различным поведением не сводятся к точкам бифуркации, а представляют собой кривые или поверхности. Так, в случае функции одной переменной, зависящей от двух существенных параметров, мы имеем дело с особенностями отображений поверхности критических точек на плоскость управляющих параметров.

Полное решение проблемы о типах особенностей таких отображений, полученное американским математиком Х. Уитни в 1955 году, послужило непосредственным толчком к становлению теории катастроф как обобщающей области математического и естественнонаучного знания. Прежде чем обсуждать мотивы такого обобщения, остановимся вкратце на простом примере, который иллюстрирует характер задач о стационарных состояниях и их устойчивости. Подобные задачи в течение двух веков рассматривались в связи с потребностями механики, физики и инженерной практики, а в наше время проливают свет на теорию катастроф, которая, в свою очередь, открывает новые возможности углубленного анализа в различных своих приложениях.

## РАВНОВЕСИЕ НАГРУЖЕННОГО ЖЕСТКОГО СТЕРЖНЯ

### Несимметричная характеристика

Рассмотрим модель, схематически показанную на рис. 2. Абсолютно жесткий стержень, соединенный с жестким основанием посредством нелинейно-упругой пружины, нагружен силой **N**, сохраняющей при отклонении стержня свое направление. В ненагруженном состоянии, когда пружина не деформирована, стержень образует угол $\theta_0$ с вертикалью. Когда угол отклонения

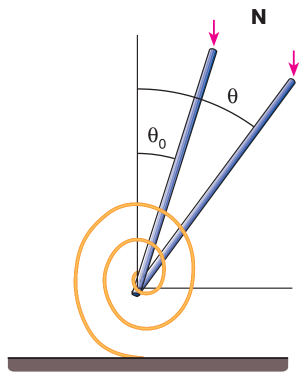


**Рис. 2.** Модель абсолютно жесткого стержня, соединенного с жестким основанием нелинейно-упругой пружиной

стержня от вертикали равен $\theta$, сила **N** создает активный момент относительно точки 0: $M = Nl\sin\theta$ (положительным считается направление по часовой стрелке), а из-за наличия нелинейно-упругой пружины возникает восстанавливающий момент

$$M = -[c_1(\theta - \theta_0) - c_2(\theta - \theta_0)^2].$$

Условие равенства нулю суммы этих двух моментов определяет критические точки, соответствующие стационарным состояниям:

$$c_1(\theta - \theta_0) - c_2(\theta - \theta_0)^2 - Nl\sin\theta = \theta. \qquad (1)$$

Функция, условие экстремальности которой (равенство нулю первой производной) приводит к трансцендентному уравнению (1), имеет ясный физический смысл – это потенциальная энергия системы:

$$\Pi(\theta) = \frac{1}{2}c_1(\theta - \theta_0)^2 - \frac{1}{3}c_2(\theta - \theta_0)^3 - Nl(1 - \cos\theta)$$

(постоянная величина $-Nl$ в этом выражении лишь фиксирует начало отсчета энергии).

Таким образом, вместо степенных функций в наших первых примерах мы имеем трансцендентную функцию, а для определения критических точек получается трансцендентное уравнение. Считая отклонение стержня от вертикального положения, характеризуемое углом $\theta$, малым, заменим функции $\sin\theta$ и $1 - \cos\theta$ первыми ненулевыми членами их степенных разложений по переменной $\theta$:

$$\sin\theta \approx \theta, \qquad 1 - \cos\theta \approx \theta^2,$$

так что в выражении для функции $\Pi = \Pi(\theta)$ удерживаются члены до третьей степени, а в уравнении (1) – до второй степени включительно. Тогда

$$\frac{1}{c_2}\Pi(\theta) = -\frac{1}{3}\theta^3 + \frac{c_1^*}{2}\left(1 - N^* + \frac{1}{c_1}\theta_0\right)\theta^2 -$$

$$-(c_1^* + \theta_0)\theta + \frac{1}{2}\left(c_1^* + \frac{1}{3}\theta_0\right)\theta_0, \qquad (2)$$

где $N^* = Nl/c$, $c_1^* = c_1/c_2$.

Казалось бы, при $\theta \ll 1$ можно оставить в выражении (2) лишь квадратичный и линейный по переменной $\theta$ члены. Однако мы имеем здесь дело с семейством функций, и, если параметр $N^*$ изменяется, например, от нулевого значения вплоть до величины $N^* > 1 + c_2^*\theta_0$, квадратичный член неизбежно вырождается, и необходимо учесть следующий, кубический член, содержащийся в выражении (2). При этом можно ввести вместо трех параметров $c_1^*$, $N^*$, $\theta_0$ один комбинированный параметр, исключая при помощи преобразования $\theta_1 = \theta - \alpha$ квадратичный либо линейный член. Пусть, например,

$$\alpha = \frac{c_1^*}{2}\left(1 - N^* + \frac{1}{c_1^*}\theta_0\right).$$

Тогда, принимая также, что $\theta_0 \ll 1$, имеем

$$\Pi^* = -\frac{1}{3}\theta_1^3 + \lambda\theta_1,$$

где

$$\Pi^* = -\frac{1}{c_2}\Pi(\theta_1) - \frac{2}{3}\alpha^3 - c_1\theta_0\alpha,$$

$$\lambda = \alpha^2 - c_1^*\theta_0 = \frac{c_1^*}{4}\left(1 - N^* + \frac{1}{c_1^*}\theta_0\right) - c_1^*\theta_0.$$

В выражениях для $\alpha$ и $\lambda$ нельзя пренебречь членами, содержащими $\theta_0$, так как при изменении управляющего параметра $N^*$ величина $1 - N^*$ может стать сколь угодно малой. Соответствующее приведенной потенциальной энергии $\Pi^*(\theta_1)$ уравнение для определения критических точек имеет теперь простой вид: $\theta_1 - \lambda = 0$. Мы видим, что при значении $\lambda = 0$ поведение функции $\Pi^* = \Pi^*(\theta_1)$ качественно изменяется: при отрицательном его значении существуют две критические точки, соответствующие стационарным состояниям, одно из которых устойчиво, а второе неустойчиво. При положительных же значениях $\lambda$ критические точки отсутствуют вообще (рис. 3).

На этом простом примере можно наблюдать все три аспекта задач на минимум и максимум, осознание которых определило формирование теории катастроф. При значении параметра $\lambda = 0$ происходит резкое изменение поведения потенциальной энергии, которая при $\lambda = 0$ оказывается структурно неустойчивой функцией переменной $\theta_1$. Нарушение структурной устойчивости при $\lambda = 0$ связано с тем фактом, что семейство функций $\Pi^* = \Pi^*(\theta, \lambda)$ при $\lambda = 0$ имеет точку бифуркации (в широком смысле слова) на графике, отражающем положение критических точек в зависимости от $\lambda$ (рис. 3, *б*). Наконец, геометрически со структурной неустойчивостью и наличием точки бифуркации при $\lambda = 0$ можно связать и особенность отображения бифуркационной диаграммы, то есть множества критических точек на ось $\lambda$. Это отображение существует лишь при значениях $\lambda > 0$, когда двум критическим точкам, одна из которых устойчива, а вторая неустойчива, соответствует одна точка на оси управляющего параметра $\lambda$. С точкой $\lambda = 0$ связывается особенность рассматриваемого отображения, получившая название "складка" (при отображении две ветви кривой критических точек как бы складываются). Сам же переход от одного поведения к другому называют катастрофой (в данном случае мы столкнулись с простейшей катастрофой типа "складка").

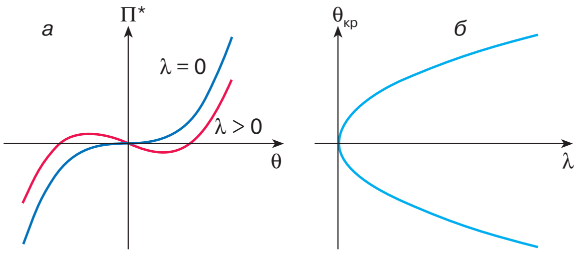


**Рис. 3.** Катастрофа типа "складка". *а* – деформация потенциальной энергии; *б* – кривая критических точек

### Случай симметричной (линейной) характеристики

Пусть теперь характеристика пружины симметрична (линейна), так что $c_2 = 0$. Казалось бы, задача исследования стационарных состояний должна в этом случае существенно упроститься. В действительности это не так, и она, напротив, усложняется. Поскольку кубический член в выражении для потенциальной энергии теперь отсутствует, мы должны удержать четвертую степень переменной $\theta$ в степенном разложении $\cos\theta$. Тогда потенциальная энергия стержня записывается следующим образом:

$$\Pi(\theta) = \frac{1}{2}c_1(\theta - \theta_0)^2 - \frac{1}{2}Nl\left(\theta^2 - \frac{1}{12}\theta^4\right) = 0,$$

а соответствующее уравнение для определения критических точек имеет вид

$$(1 - N^*)\theta + \frac{1}{6}N^*\theta^3\theta_0 = 0, \qquad N^* = \frac{N}{c_1/l}.$$

Теперь можно записать приведенную потенциальную энергию и уравнение для критических точек в стандартной форме

$$\Pi_1^*(\theta) = \frac{1}{4}\theta^4 + \frac{1}{2}\lambda_1\theta^2 + \lambda_2\theta,$$

$$\theta^3 + \lambda_1\theta + \lambda_2 = 0,$$

где

$$\lambda_1 = 6\left(\frac{1 - N^*}{N^*}\right), \qquad \lambda_2 = -\frac{6}{N^*}, \qquad \Pi^* = \frac{6\Pi}{N^* c_1}.$$

В данном случае мы имеем два управляющих параметра, при обращении которых в нуль потенциальная энергия системы представляет собой структурно неустойчивую функцию. Если эти параметры изменяются в диапазоне, включающем нулевые значения, структурная неустойчивость неизбежно реализуется. Так, при $\lambda_2 = 0$ с изменением параметра $\lambda_1$, определяемого величиной приложенной к стержню сжимающей нагрузки, структурная неустойчивость достигается в точке бифуркации $\lambda_1 = 0$ при так называемой критической нагрузке $N^* = 1$ (рис. 4, *а*). Характер изменения потенциальной энергии $\Pi(\theta)$ соответствует эволюции функции $y = x^4 - \varepsilon x^2$ (третий из наших примеров).

Рассматриваемая модель с симметричной характеристикой при $\theta_0 = 0$ представляет собой в чрезвычайно упрощенном виде систему, которая стала одним из первых объектов исследования устойчивости в науке нового времени. Речь идет об устойчивости прямолинейной формы равновесия вертикально расположенного линейно-упругого стержня, нагруженного вертикальной нагрузкой. Эта задача, которая впервые была поставлена и решена Л. Эйлером в предположении о малости поперечных отклонений, стала предтечей такой важнейшей области математики, как спектральная теория дифференциальных уравнений. В конце XVIII века Лагранж получил решение этой задачи без ограничений на величину поперечных отклонений. Ее математическое описание приводит к нелинейному дифференциальному уравнению. Наша упрощенная за счет предположения об абсолютной жесткости стержня модель, описываемая нелинейным алгебраическим уравнением и учитывающая начальное отклонение от прямолинейной формы при $N^* = 0$, схватывает существо дела. Но она оказывается сложнее, чем более общая модель с несимметричной характеристикой пружины. Вместо кубической функции мы имеем теперь функцию четвертой степени, вместо одного – два существенных параметра, вместо квадратного – кубическое уравнение для определения критических точек.

С геометрической точки зрения вместо отображения кривой критических точек на ось, вдоль которой изменяется единственный управляющий параметр, приходим здесь к отображению поверхности критических точек на плоскость управляющих параметров (рис. 4, *б*). Роль граничной точки на прямой, соответствующей

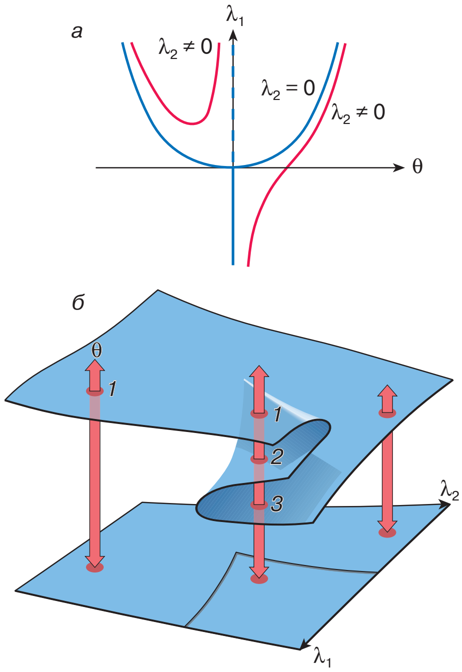


**Рис. 4.** Катастрофа типа "сборка". Поверхность критических точек

появлению кратных корней квадратного уравнения, играет теперь полукубическая парабола на плоскости. Ветви этой параболы характеризуют зависимость двукратных корней кубического уравнения от управляющего параметра, а разделяющая их точка возврата соответствует тройному корню. Точки полукубической параболы образуют линии складки, а точка возврата, в которой эти линии собираются, получила название точки сборки. Во внутренней области, ограниченной линиями складки, кубическое уравнение имеет три вещественных корня, вне этих линий – один вещественный корень. Отсюда и название соответствующей особенности отображения – "сборка" (так же называется и катастрофа, состоящая в резком изменении поведения систем рассматриваемого типа). Она характеризует семейство функций четвертой степени, зависящих от двух параметров, и геометрию соответствующего кубического уравнения. Линию обобщений можно продолжить: катастрофа, которая соответствует возникновению структурной неустойчивости в семействе функций пятой степени, зависящем от трех параметров, и описывающая геометрию уравнения четвертой степени, имеет название "ласточкин хвост". Далее можно перейти к семействам функций более высоких степеней, а затем к семействам функций двух, трех и более переменных, когда число существенных параметров уже трудно найти из интуитивных соображений, подкрепленных простыми выкладками.

Если внимательно проанализировать многочисленные примеры задач устойчивости, ставших объектами исследования в приложениях математики, то мы убедимся, что в конечном счете эти задачи приводят тем или иным путем к простым моделям, определяемым одной, максимум двумя функциями, зависящими от одного или двух параметров. В этих случаях хватает стандартных представлений, развитых применительно к задачам на экстремум. Однако при анализе более сложных систем идеи и методы теории катастроф оказываются чрезвычайно полезными. Они позволяют ответить на вопросы, которые ранее не были поставлены.

Мы видели, что существуют различные типы катастроф. Возможна ли их классификация? Сталкиваясь с трансцендентными функциями, мы учитывали лишь несколько членов в их степенных разложениях. Насколько это оправдано? Наконец, модели реальных систем часто приводят к условиям экстремума функций многих переменных, зависящих от многих же параметров. Эти условия представляют собой системы нелинейных уравнений со многими параметрами, которые зачастую с трудом поддаются даже численному анализу. Являются ли все эти переменные и параметры существенными, а если нет, как выделить таковые? Убедительный ответ на эти вопросы при определенных условиях может быть дан теорией катастроф, и в результате возникает обоснованная возможность резкого упрощения сложных нелинейных задач.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Качественные изменения в поведении различных физических систем активно изучались и изучаются в традиционных подходах, но теория катастроф проливает свет и на гораздо более сложные проблемы подобного рода. В результате открывается возможность глубоко и далеко идущих обобщений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990.
2. *Постон Т., Стюарт Й.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.

*Рецензент статьи* Ю.П. Соловьев

* * *

Леонид Исакович Маневич, профессор Московского физико-технического института, зав. сектором Института химической физики РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика, асимптотические методы, физика полимеров, механика сплошной среды. Автор свыше 300 научных работ, в том числе десяти монографий.