УСТОЙЧИВОСТЬ, БИФУРКАЦИИ, КАТАСТРОФЫ

В. С. АНИЩЕНКО
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

STABILITY, BIFURCATIONS, AND CATASTROPHES

V. S. ANISHCHENKO

The basic ideas and principles of the approach to the analysis of stability and bifurcations of the regimes of dynamic systems are presented.

Изложены основные идеи и принципы подхода к анализу устойчивости и бифуркаций режимов функционирования динамических систем.

www.issep.rssi.ru

ВВЕДЕНИЕ

Наши представления об устойчивости того или иного режима функционирования динамической системы интуитивно формируются в процессе познания природы и жизни. Первые шаги маленького ребенка дают ему вполне реальные представления об устойчивости при ходьбе, хотя они (представления) еще неосознанны. Глядя на знаменитую картину П. Пикассо “Девочка на шаре”, мы как бы на себе ощущаем, что положение равновесия девочки неустойчиво. Взрослея, мы уже можем рассуждать об устойчивости корабля в бушующем море, об устойчивости экономики по отношению к действиям управленцев, об устойчивости нашей нервной системы к стрессорным возмущениям и т.д. В каждом конкретном случае речь идет об отличающихся свойствах, специфических для рассматриваемых систем. Однако если внимательно вдуматься, то можно найти нечто общее, присущее любой системе. Это общее заключается в том, что когда мы говорим об устойчивости, то понимаем под этим характер реакции динамической системы на малое возмущение ее состояния. Если сколь угодно малые изменения состояния системы начинают нарастать во времени, система неустойчива. В противном случае, если малые возмущения затухают со временем, система устойчива.

Анализ устойчивости режима функционирования динамической системы является чрезвычайно важным с практической точки зрения. Устойчивость таких систем, как автомобиль, воздушный или морской лайнеры, по отношению к возмущениям, которые всегда сопровождают их движение, безусловно жизненно важный фактор в самом прямом смысле этого слова.

Еще более важной проблемой является анализ устойчивости сложных, многокомпонентных систем. Наблюдая за эволюцией живой и неживой природы, мы можем подметить одно интересное свойство: развитие той или иной сложной системы всегда сопровождается потерей устойчивости некоторыми режимами ее функционирования и рождением новых, устойчивых. Одни структуры гибнут, рождаются новые, которые видоизменяются, совершенствуются и затем вновь уступают место новым. Изменения могут накапливаться плавно, а могут происходить скачком в виде катастроф. Формирование новых структур всегда сопровождается потерей устойчивости (даже разрушением) предшествующих. И здесь скрыта важная проблема – проблема перехода системы из одного режима функционирования в другой режим, отличающийся принципиально. Предшествующий режим потерял устойчивость. Но что при этом происходит? Система выбирает новый устойчивый режим, который может наследовать некоторые свойства предыдущего, а может быть и резко отличным. В таких случаях говорят о бифуркациях динамических систем.

Приведенные рассуждения являются качественными и приобретают вполне определенный смысл лишь в том случае, когда удается перевести их на формальный язык математики. Основы строгой математической теории устойчивости были заложены в трудах русского математика А.М. Ляпунова около ста лет назад. Развитие качественной теории и теории бифуркаций динамических систем связано с именами российских ученых А.А. Андронова, В.И. Арнольда и их учеников.

Попытаемся на простых и понятных примерах проиллюстрировать содержание и методы решения задач об устойчивости и бифуркациях динамических систем.

ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Любая динамическая система (физическая, химическая, механическая и т.д.) ассоциируется в нашем представлении с эволюцией во времени. Предвидя возражения, укажем, что стационарное состояние, при котором скорость изучаемого процесса равна нулю, тем более состояние равновесия, также можно трактовать как предельный случай эволюции системы во времени. В естествознании типичной моделью динамической системы является обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} = F(x, \mu), \qquad (1)$$

где $x(t)$ – переменная состояния, F – некоторая функция состояния, характеризующая закон эволюции, μ – параметр системы. Если задано начальное состояние $x(t_0)$, то существует единственное решение уравнения (1), которое предсказывает будущее состояние $x(t)$ для любых $t > t_0$. Если число переменных состояния равно двум (или более), то моделью будет система двух (или более) уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, \mu), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, \mu). \end{aligned} \qquad (2)$$

Число параметров также может быть больше, чем один.

В связи с тем что проблема устойчивости связана с анализом реакции системы на малое возмущение ее состояния, на первом этапе она может быть исследована в рамках линейного приближения. Поясним это. Пусть $x^0(t)$ есть некоторое частное решение уравнения (1). Устойчивость этого решения (состояния) мы хотим исследовать. Введем в рассмотрение переменную $y(t)$, которая задает малое отклонение от частного решения:

$$y(t) = x(t) - x^0(t) \qquad (3)$$

(здесь $x(t)$ – возмущенное решение).

Наша задача состоит в исследовании эволюции во времени малого возмущения $y(t)$, которая подчиняется уравнению (1). Разложим функцию F в степенной ряд в окрестности частного решения $x^0(t)$:

$$F(y) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x = x^0(t)} \cdot y(t) + \left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x = x^0(t)} \cdot y^2(t) + \ldots \qquad (4)$$

Производные функции F должны вычисляться в точках, соответствующих частному решению.

Перепишем уравнение (1) для возмущения $y(t)$ с учетом (4):

$$\dot{y}(t) = F(y, \mu) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x = x^0(t)} \cdot y(t) + \Phi(y), \qquad (5)$$

где

$$\Phi(y) = \left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x = x^0(t)} \cdot y^2(t) + \ldots \qquad (6)$$

Слагаемые $\Phi(y)$ включают все члены с y^n $(n \ge 2)$, то есть учитывают нелинейные добавки. По определению, переменная $y(t)$ есть малое отклонение от частного решения. Поэтому нелинейными членами в уравнении (5) в первом приближении можно пренебречь.

Таким образом, для эволюции малого возмущения мы получаем линейное уравнение

$$\dot{y} = A(t)y, \qquad \text{где } A(t) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x = x^0(t)}. \qquad (7)$$

Рассмотрим **пример**. Пусть динамическая система задана уравнением

$$\dot{x} = a - bx^2, \qquad a > 0, \qquad b > 0. \qquad (8)$$

Найдем стационарные состояния этой системы и исследуем их устойчивость. В стационарном состоянии изменений во времени нет, значит, $\dot{x} = 0$ и мы получаем

$$x^0_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}. \qquad (9)$$

Рассмотрим уравнение для возмущений (7) применительно к первому стационарному состоянию x_1^0:

$$\dot{y} = -(2bx_1^0)y = (-2\sqrt{ab})y = \lambda y, \qquad (10)$$

$$\lambda = \frac{dF}{dx}\bigg|_{x_1^0} = -2\sqrt{ab}.$$

Решением уравнения (10) будет $y = \exp(\lambda t)$. Возмущение y экспоненциально затухает во времени (λ есть отрицательное число). Это означает, что состояние x_1^0 устойчиво. Так как второе состояние x_2^0 отличается от первого только знаком, то решение уравнения (10) в этом случае будет экспоненциально нарастающим во времени. Стационарное состояние x_2^0 неустойчиво.

Достаточно простая идея предсказания устойчивости по линейному приближению оказалась весьма плодотворной. Используя математический формализм, можно обобщить результат (7) на случай двух и более переменных состояния. Например, в случае $N = 2$ уравнение (7) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ \dot{y}_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \end{aligned} \qquad (11)$$

где

$$a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\bigg|_{x_i = x_i^0}, \qquad i, j = 1, 2.$$

Если одномерное уравнение (1) описывает эволюцию исключительно в окрестности стационарных состояний, то уравнение (2) может иметь в качестве решения не только стационарные, но и периодические решения. С увеличением размерности исходной системы (1) в общем случае усложняются и типы возможных решений. Это создает определенные проблемы в исследовании устойчивости: ведь для решения уравнений для возмущений типа (7) необходимо знать частное решение $x^0(t)$! С применением современных компьютеров эти трудности легко преодолимы.

БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Если внимательно присмотреться к окружающей нас природе, то можно сделать следующее интересное наблюдение. Жизнь на планете Земля возможна лишь благодаря тепловому излучению Солнца, которое служит источником энергии. Летом северное полушарие получает световой энергии больше, чем зимой. И картина летней природы при этом заметно отличается от зимней. Давайте рассмотрим в качестве примера объем воды в озере. Количественной мерой привносимой солнечной энергии является температура воды. Летом вода в озере теплая и можно купаться. С наступлением осени температура воды постепенно уменьшается. Купаться уже не хочется, однако вода и при более низкой, но плюсовой температуре остается водой! Глубокой осенью верхний слой воды в озере остывает до нулевой температуры и вдруг превращается в лед! Далее и при –20°С лед остается льдом. Что же произошло? При прохождении температуры через нуль вода резко изменила свои свойства: она из жидкого состояния перешла в твердое. И не плавно, а скачком.

Если рассматривать температуру воды как некий параметр системы, то хорошо известно, что с изменением параметра вода резко меняет свои свойства при переходе через 0°С, через 100°С, когда вода превращается в пар. Есть и другие особые значения температуры воды. Оказывается, что большинство интересных физических задач при их математическом описании приводят к дифференциальным уравнениям, зависящим от одного или нескольких параметров.

Рассмотрим в качестве другого примера уравнения колебаний обыкновенного маятника или (что с математической точки зрения полностью идентично) параллельного *RLC*-контура:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (12)$$

Уравнение (12) содержит два параметра: α – параметр затухания, характеризующий трение, и ω_0 – параметр, определяющий частоту колебаний. Если потери энергии отсутствуют (параметр затухания $\alpha = 0$), то решением уравнения (12) будут гармонические незатухающие колебания. При малом трении $0 < \alpha < 1$ движение системы будет колебательным с амплитудой, которая уменьшается во времени по экспоненциальному закону. Наконец, при достаточно большом трении ($\alpha > 1$) движение маятника будет апериодическим, затухающим во времени. Уже в этом простом примере выделяются два особых значения параметра $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, отклонения от которых качественно меняют свойства системы.

Изменение параметра в уравнении может вызвать потерю устойчивости одного состояния (или режима функционирования) системы и переход ее в другое, отличное от первого состояние. Это явление, как сказано выше, называется *бифуркацией* (от слова раздвоение), а значение параметра, при котором оно происходит, – *точкой бифуркации*. Состояние системы ниже точки бифуркации и выше ее при изменении параметра все-таки меняется. Ясно, что вода при температуре +3 и +22°С – это разные состояния. Но при этом вода остается водой! В математике и физике существует понятие грубости или структурной устойчивости. Суть этого понятия в том, что при малом изменении параметра грубая система хоть и изменяет в деталях режим функционирования, но не принципиально. С этой точки зрения для грубых систем переход через точку бифуркации означает смену одного структурно устойчивого режима на другой. При этом в точке бифуркации система не является грубой: малое изменение параметра в ту или иную сторону приводит к резким изменениям состояния.

Давайте вернемся к нашему примеру с устойчивостью стационарных состояний в системе (8). Мы условились, что в уравнении (8) параметры a и b положительны. Устойчивость определяется знаком производной правой части уравнения (8) в стационарной точке, то есть знаком величины λ (10). При положительных значениях параметров a и b эта производная всегда отлична от нуля. А что, если мы будем уменьшать значение параметра a? Как видно из (10), при $a = 0$ (независимо от величины $b > 0$) величина λ обращается в нуль, возмущение y не нарастает и не затухает. Мало того, при $a = 0$ в системе (2) оба стационарных состояния как бы сливаются в одно ($x = 0$)! Далее, если $a < 0$, то стационарных состояний нет вовсе. Действительно, в этом случае $x^0_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{|a|}{b}}$ (j – мнимая единица), то есть при $a < 0$ становятся чисто мнимыми.

Приведем теперь результаты математического анализа этой бифуркации, которая известна как бифуркация "двукратное равновесие". Вновь рассмотрим уравнение (8). Пусть $x^0(a)$ есть грубое состояние равновесия, то есть $\lambda(a) \neq 0$. Это означает, что при малой вариации параметра a состояние $x^0(a)$ продолжает существовать как устойчивое или неустойчивое стационарное состояние.

При некотором значении параметра $a = a^*$ собственное число $\lambda(a^*)$ в стационарном состоянии может обратиться в нуль:

$$\lambda(a) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x^0} = 0, \qquad a = a^*. \tag{13}$$

Для реализации бифуркации "двукратное равновесие" необходимо, чтобы вторая производная была отлична от нуля:

$$\left.\frac{d^2F}{\partial x^2}\right|_{x^0} \neq 0. \tag{14}$$

Для выполнения условий (13) и (14) в общем случае необходимо, чтобы исходное уравнение в правой части включало как минимум квадратичное нелинейное слагаемое, как в нашем примере (8).

Если условия (13) и (14) выполнены, то x^0 есть двукратный корень исходного уравнения (8).

Значение параметра a^*, при котором выполняется условие (13), является точкой бифуркации. До точки бифуркации $a < a^*$ мы имеем два стационарных состояния. В точке бифуркации $a = a^*$ они сливаются в одно, далее при $a > a^*$ этих состояний в системе не будет. В нашем случае (8) $a^* = 0$.

Результаты можно представить графически (рис. 1).

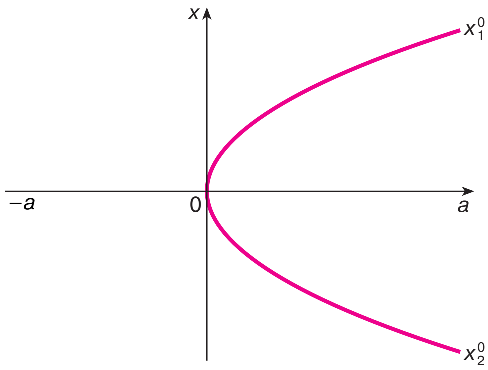

Рис. 1. Бифуркация "двукратное равновесие". При $a > 0$ в системе (8) два стационарных состояния x^0_1 и x^0_2, при $a = 0$ они сливаются в одно, и при $a < 0$ стационарные состояния исчезают

"МЯГКИЕ" И "ЖЕСТКИЕ" БИФУРКАЦИИ. КАТАСТРОФЫ

Несмотря на многолетнюю историю существования и развития классической теории устойчивости и бифуркаций, наступил момент (как это часто бывает), когда к этой теории было вдруг привлечено всеобщее внимание. Причиной тому послужили популярно изложенные версии работ французского математика Рене Тома по так называемой теории катастроф. Теория катастроф в начале 70-х годов стала модной, понятной (как тогда казалось) для неспециалистов и универсальностью своих претензий стала напоминать псевдонаучные теории прошлых времен. Появление теории катастроф Р. Тома специалистами не было воспринято как новое открытие, хотя некоторые результаты этой теории заслуживают самого глубокого уважения. Но принципиального научного открытия здесь нет.

Речь шла все о тех же бифуркациях, но при этом выбирался один из типов – так называемые *жесткие бифуркации*. Для пояснения рассмотрим два простых примера. В первом случае (рис. 2) в результате бифуркации исходное стационарное состояние теряет устойчивость и рождаются два новых устойчивых стационарных состояния. При этом вновь появившиеся два стационарных состояния (рис. 2, *3*) расположены в непосредственной близости от исходного состояния,

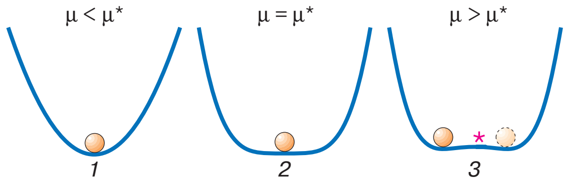

Рис. 2. Пример мягкой бифуркации. Стационарное состояние *1* теряет устойчивость *2*, и вблизи него появляются два новых устойчивых стационарных состояния *3*

которое потеряло устойчивость (помечено звездочкой рис. 2, *3*). Бифуркации такого типа называют *мягкими*, имея в виду, что вновь родившийся режим функционирования системы как бы появляется из режима, потерявшего устойчивость, и сосуществует рядом с ним.

Другой пример бифуркации качественно представлен на рис. 3. При $\mu < \mu^*$ (рис. 3, *1*) шарик находится в устойчивом стационарном состоянии. При этом существует еще одно, неустойчивое состояние (помечено звездочкой на рис. 3, *1*). В точке бифуркации $\mu = \mu^*$ ус-

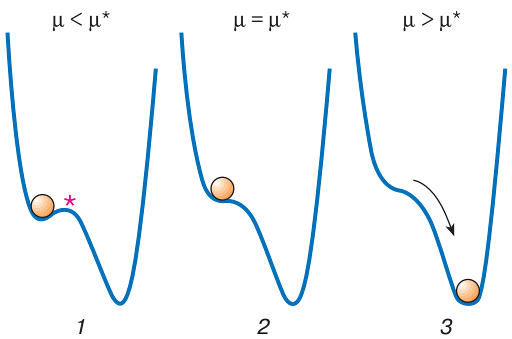

Рис. 3. Жесткая потеря устойчивости стационарным состоянием, катастрофа. Качественная иллюстрация бифуркации “двукратное равновесие” (рис. 1)

тойчивое и неустойчивое состояния сливаются в одно (рис. 3, *2*). Далее они исчезают, и система выбирает новый режим (например, как это показано на рис. 3, *3*), который существенно отличается от предыдущего и не находится в непосредственной близости от исходного режима. Такой тип бифуркаций называют *жестким*, и именно жесткие бифуркации явились предметом анализа в теории катастроф.

Рассмотренный выше пример бифуркации “двукратное равновесие” в системе (8) представляет собой типичный пример жесткой бифуркации, который качественно проиллюстрирован на рис. 3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате упрощенного, качественного описания проблемы устойчивости и бифуркаций динамических систем можно тем не менее сделать определенные выводы. Эволюция любых систем сопровождается потерей устойчивости одними режимами функционирования и бифуркационными переходами их в новые. Эти “фазовые переходы” могут осуществляться плавно, мягко, а могут происходить скачкообразно, в виде катастроф. Строгий математический анализ устойчивости и бифуркаций позволяет сегодня практически рассматривать широкий спектр проблем, связанных с исследованиями бифуркационных переходов в различных динамических системах. Но при этом необходимо опираться на строгие математические результаты и использовать обоснованные методы теоретического и качественного анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Изд-во МГУ, 1983.
2. *Постон Т., Стюард Я.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1977.
3. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.

Рецензент статьи Б.С. Бокштейн

* * *

Вадим Семенович Анищенко, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета, заслуженный деятель науки Российской Федерации, член-корреспондент РАЕН и Международной академии информатизации. Лауреат премии по физике Фонда им. А. Гумбольдта. Область научных интересов – нелинейная динамика и статистическая радиофизика. Автор более 250 научных работ, семи научных монографий.