

или

$$38x = 53.$$

Отсюда следует, что роль квазирешения играет величина $53/38$.

Пример 2. Рассмотрим систему, состоящую из трех уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0, \\ x_2 &= 2, \\ x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Для этого примера получаем следующие выражения соответствующих векторов:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} (e_1, e_1) &= 2, & (e_1, e_2) &= 0, & (e_2, e_2) &= 3, \\ (b, e_1) &= 0, & (b, e_2) &= 2. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к системе уравнений вида

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 0, \\ 3x_2 &= 2, \end{aligned}$$

то есть

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

Следует отметить, что условие линейной независимости векторов e_1, e_2, \dots, e_n , которые являются столбцами матрицы A , весьма ограничительно и заведомо не выполняется, когда количество неизвестных совпадает с количеством уравнений, то есть $m = n$, а $\det A = 0$. В последнем случае обычно применяют метод регуляризации [3].

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Метод регуляризации состоит в замене матрицы A матрицей $A + \delta E$ (E – единичная матрица), определитель которой не равен нулю и, следовательно, преобразованная система имеет единственное решение, которое и объявляется квазирешением исходной системы. Ясно, что такое квазирешение зависит от величины δ .

Пример 3. Рассмотрим следующую систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Соответствующая регуляризованная система имеет вид

$$\begin{aligned} (1 + \delta)x_1 + 2x_2 &= 1, \\ x_1 + (2 + \delta)x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Решение этой системы, имеющее вид

$$x_1 = \frac{\delta - 2}{\delta(\delta + 3)}, \quad x_2 = \frac{2\delta + 1}{\delta(\delta + 3)}$$

и зависящее от δ , играет роль квазирешения исходной системы.

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Здесь предлагается рассмотреть метод приближенного решения линейных систем вида (1), суть которого заключается в последовательном проектировании точек m -мерного евклидова пространства на гиперплоскости, описываемые уравнениями этой системы. Иногда этот метод называют методом Качмажа.

Сначала изложим этот метод на примере систем трех уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= b_3. \end{aligned}$$

Каждое уравнение этой системы задает прямую на плоскости переменных x_1, x_2 . Приближенное решение строится следующим образом. В качестве первой точки выбирается любая точка на прямой L_1 , задаваемой первым уравнением. Можно, например, взять любую точку на плоскости и спроектировать ее на эту прямую. Для определенности в качестве первой точки можно выбрать точку с координатами $x_1 = a_{11}b_1/\Delta_1, x_2 = a_{12}b_1/\Delta_1$, где $\Delta_1 = a_{11}^2 + a_{12}^2$, которая получается в результате проектирования начала координат на прямую L_1 . Напомним, что проекция точки с координатами (x_1^0, x_2^0) на прямую, задаваемую уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 = d,$$

имеет координаты

$$\left(a_1d + \frac{a_2^2x_1^0 - a_1a_2x_2^0}{a_1^2 + a_2^2}, \quad a_2d + \frac{-a_1a_2x_1^0 + a_1^2x_2^0}{a_1^2 + a_2^2} \right).$$

Вторая точка получается в результате проектирования первой точки на прямую L_2 , задаваемую вторым уравнением системы, а третья – как результат проектирования второй точки на прямую L_3 , которая задается третьим уравнением. Четвертая точка, как и первая, принадлежит первой прямой и получается в результате проектирования третьей точки на первую прямую. Пятая точка получается проектированием четвертой на L_2

и т.д. Процесс продолжается до тех пор, пока расстояние между последовательными точками на одной прямой (L_1 для определенности) не станет меньше некоторого наперед заданного числа.

Описанная выше процедура очевидным образом переносится на случай системы вида (1) с любым количеством уравнений и неизвестных. Отличие заключается только в том, что в общем случае каждое уравнение системы описывает не прямую, а так называемую гиперплоскость в пространстве переменных x_1, x_2, \dots, x_n (плоскость для $n = 1$) и проектирование осуществляется на эту гиперплоскость (плоскость).

Важно отметить, что метод проектирования всегда сходится. Более того, для совместных систем последовательность точек, получающихся проектированием на гиперплоскости, сходится именно к решению (одному из решений) системы. Доказательство этого факта можно провести используя принцип сжатых отображений [4].

Рассмотрим систему уравнений из примера 2.

Нетрудно убедиться в том, что последовательные проекции сходятся к точке $(0, 0)$ на первой прямой, к точке $(0, 2)$ на второй прямой и к точке $(-1, 1)$ на третьей прямой. Если в качестве квазирешения выбирается центр тяжести полученного треугольника, то соответствующие значения неизвестных имеют вид

$$x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = 1.$$

Интересно отметить, что в случае, когда отрезки прямых, описываемых уравнениями системы, образуют равносторонний треугольник, последовательности проекций на каждой из прямых сходятся к точкам, которые являются вершинами равностороннего треугольника меньшего размера и делят стороны большего треугольника в отношении $1 : 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1984. 294 с.
2. Ильин В.А. Базисы в евклидовых пространствах и ряды Фурье // Соросовский Образовательный Журнал. 1998. № 4. С. 95–101.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 286 с.
4. Баскаков А.Г. Сжимающие отображения и решение нелинейных уравнений // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 5. С. 118–121.

Рецензент статьи Е.И. Моисеев

* * *

Владимир Андреевич Соболев, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета, декан факультета математики и компьютерных наук Самарского муниципального университета Наяновой, академик РАЕН. Область научных интересов – дифференциальные уравнения, теоретическая механика, математическое моделирование, теория управления. Автор более 80 научных публикаций и четырех книг.