

## УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В ЭЛЕКТРОННОМ ПОТОКЕ И ЮБИЛЕЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Д. И. ТРУБЕЦКОВ

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

### SOLITARY WAVES IN AN ELECTRON BEAM AND A JUBILEE OF ONE EQUATION

D. I. TRUBETSKOV

*Solitary space-charge waves in an electron beam and their connection with solitons described by the Korteweg-de Vries equation are examined.*

*Рассказано об уединенных волнах пространственного заряда в электронном потоке и их связи с солитонами, описываемыми уравнением Кортевега–де Фриса.*

### ВВЕДЕНИЕ

Электроника сверхвысоких частот (СВЧ) всегда использовала язык теории колебаний и волн. Более того, по-видимому, она одной из первых стала нелинейной наукой, активно применяющей методы вычислительной физики. Однако, начав с нелинейных волн, электроника СВЧ-надолго забыла о них, используя для описания обгона одних электронов другими метод Лагранжа, когда следят за каждой частицей. В последние годы успехи нелинейной динамики были столь значительны, что специалисты в области СВЧ электроники стали активно искать уединенные волны, режимы возникновения динамического хаоса и образования структур в электронных потоках и системах поток – электромагнитное поле.

В статье обсуждаются следующие вопросы. В разделе 1 дано краткое описание линейных волн пространственного заряда – медленной волны пространственного заряда (МВПЗ), с которой связывают перенос отрицательной энергии, и быстрой волны пространственного заряда (БВПЗ), переносящей положительную энергию. Рассмотрены два взаимодействующих электронных потока как иллюстрация систем с волновыми неустойчивостями – конвективной и абсолютной.

Раздел 2 посвящен юбилею – уравнению Кортевега–де Фриса. Для электронного потока это уравнение получено в ряде работ из исходных уравнений при весьма серьезных упрощениях, которые не всегда оправданы.

Наконец, в разделе 3 приведены результаты аналитических исследований и вычислительного эксперимента, доказывающие существование медленной и быстрой уединенных волн пространственного заряда. Результаты вычислительных экспериментов сравниваются с аналитическими решениями уравнения Кортевега–де Фриса.

## 1. ДВУХЛУЧЕВОЙ УСИЛИТЕЛЬ И ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Начнем с поучительного примера неудавшегося прибора, предложенного известными в области СВЧ-электроники американскими физиками Джоном Пирсом и Андреем Гаевым. Прибор не удался, но его исследование дало чрезвычайно много для линейной теории волн и развития общей концепции колебаний и волн в электронных потоках. На рис. 1 двухлучевая лампа изображена схематически, причем пучки для наглядности разнесены. В экспериментальных макетах использовали две электронные пушки, которые обеспечивали различие в скоростях электронных потоков (это достигалось тем, что на катоды подавали разные отрицательные потенциалы, а аноды находились под нулевым потенциалом). Конструкция катодов выбиралась такой, чтобы обеспечить хорошее взаимопроникновение потоков (например, в одной из конструкций катод был выполнен в виде двух плоских спиралек, размещенных одна

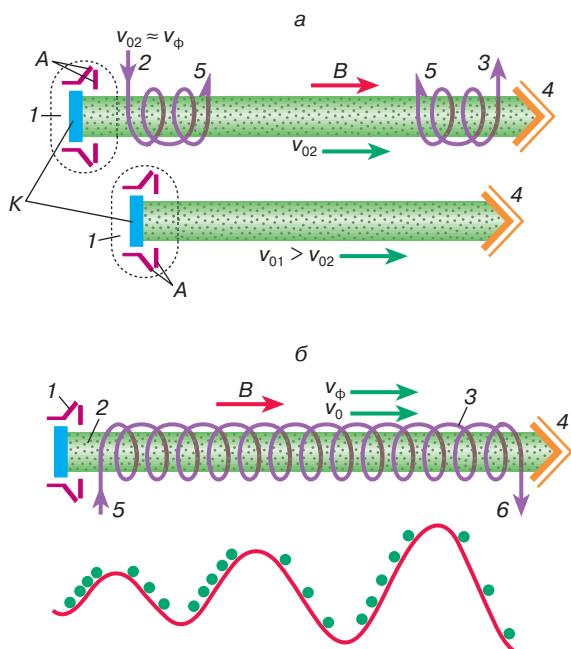
перед другой, так что электроны, эмиттируемые первым катодом, проходят между витками второго катода, чем и обеспечивается хорошее смешивание потоков).

Для введения усиливаемого электромагнитного сигнала в один или оба потока обычно используют отрезок электродинамической системы (например, проволочной спирали), по которой распространяется электромагнитная волна, ВЧ продольное электрическое поле которой изменяет скорость и плотность электронов (модулирует электроны по скорости и плотности). Роль электродинамической системы состоит в том, чтобы создать продольную составляющую электрического поля и уменьшить продольную составляющую фазовой скорости  $v_\phi$  волны до скорости электронов. Так, в спирале  $v_\phi \approx c \frac{h}{2\pi r}$ , где  $c$  — скорость света в свободном пространстве,  $h$  — шаг спирали,  $r$  — радиус спирали, то есть коэффициент замедления волн приближенно равен отношению длины витка спирали  $2\pi r$  к ее шагу. Скорость одного из потоков подбирается близко к продольной составляющей фазовой скорости волны в спирали для того, чтобы воздействие поля на поток было эффективным<sup>1</sup>.

Входное устройство модулирует медленный электронный поток по скорости и по плотности, что приводит к образованию электронной периодической структуры — чередующихся уплотнений и разрежений электронов. Такая ситуация при слабом усиливающем сигнале соответствует распространению в пучке двух линейных волн пространственного заряда: быстрой (БВПЗ) и медленной (МВПЗ), фазовые скорости

которых  $v_{\text{ФБМ}} = v_{02} \left(1 + \frac{\omega_q}{\omega}\right)^{-1}$ , где  $\omega_q = R \left(\frac{e\rho_0}{m\varepsilon_0}\right)^{1/2}$ ,  $\omega_p = \left(\frac{e\rho_0}{m\varepsilon_0}\right)^{1/2}$  — плазменная частота,  $e$  и  $m$  — заряд и нерелятивистская масса электрона,  $\rho_0$  — постоянная составляющая плотности бесконечно широкого электронного потока,  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума,  $R$  — фактор влияния окружающих стенок, вообще говоря зависящий от частоты сигнала  $\omega$ . Можно считать, что роль модулированного электронного потока в двухлучевой системе аналогична роли замедляющей системы (скажем, той же проволочной спирали) в лампе бегущей волны (ЛБВ), где электронный поток длительно взаимодействует с продольной составляющей поля замедленной волны в электродинамической системе.

<sup>1</sup> Условие равенства фазовой скорости волн переносной скорости электронов называют условием синхронизма или условием пространственного резонанса.



**Рис. 1.** а – схематическое изображение двухлучевого усилителя: 1 – электронные пушки; К – катод, А – аноды; 2 – входное и 3 – выходное устройства; 4 – коллекторы; 5 – согласованные нагрузки; В – фокусирующее магнитное поле; б – схематическое изображение ЛБВ: 1 – электронная пушка; 2 – электронный поток; 3 – спираль; 4 – коллектор; 5 – входное и 6 – выходное устройства; В – фокусирующее магнитное поле; внизу рисунок, поясняющий в рамках механической модели процессы группирования электронов в бегущей волне и взаимодействия с ней

## ФИЗИКА

Для объяснения особенностей группирования электронов в бегущей волне и их взаимодействия с ней привлечем механическую модель, в которой электроны можно представить в виде шариков, а эффект действия поля заменить действием гравитационных сил некоторой поверхности, форма которой соответствует мгновенному распределению потенциала ВЧ-поля вдоль длины пространства взаимодействия (рис. 1, б). Предложим, что невозмущенная скорость электронов  $v_0$  больше фазовой скорости  $v_\phi$  замедленной волны, распространяющейся в волноведущей линии без пучка, а амплитуда волны растет с расстоянием. В системе координат, связанной с волной, вершины и впадины потенциальной поверхности неподвижны относительно продольной координаты. Электроны-шарики на своем пути встречают области подъема и спада потенциальной поверхности, поэтому они группируются на тормозящих (“правых”) склонах и разгруппировываются на ускоряющих (“левых”). Следовательно, струи электронов-шариков формируются на правых склонах, причем эффект торможения превосходит эффект ускорения, поскольку мы допустили существование волны с нарастающей амплитудой. Энергия взаимодействия будет наибольшей, когда электроны-шарики за время пролета пройдут весь тормозящий склон.

Таким образом, усиление волны происходит в результате непрерывного последовательного отбора от электронного потока незначительных порций энергии по всей длине пространства взаимодействия пучка с волной. Распространение волны со скоростью, близкой к скорости потока, обеспечивает возможность пребывания электронов в поле данной фазы в течение всего времени пролета пространства взаимодействия. Хороший зрительный образ идеи синхронизма электронов и волны – спортсмен, занимающийся серфингом: в случае удачи он удерживается на волне и движется вместе с ней.

В двухлучевой лампе немодулированный быстрый поток ( $v_{01} > v_{02}$ ) взаимодействует с продольной составляющей медленной электронной волны в промодулированном потоке. Тогда, как и в ЛБВ, при соответствующем выборе скорости  $v_{01}$  потока (должны выполняться условия пространственного резонанса – скорость электронного потока должна быть близка к скорости волны в электронной периодической структуре) последний будет отдавать энергию ВЧ-полю; в результате возможно усиление выходного сигнала.

Особенно перспективной двухлучевая лампа казалась в диапазоне миллиметровых длин волн, поскольку сочетала длительное взаимодействие с отсутствием мелкоструктурных замедляющих систем (напомним, что на СВЧ характерные размеры прибора соизмеримы с усиливающей длиной волны). Правда, входное и вы-

ходное устройства все же оставались бы в этом диапазоне мелкоструктурными. Однако, как оказалось, переход к высоким частотам требует уменьшения разности скоростей потоков и увеличения плотности в них. Сближение скоростей потоков ограничено разбросом электронов по скоростям, который характеризуется функцией распределения электронов по скоростям. Понятно, что, когда разность  $|v_{01}| - |v_{02}|$  сравнима с разбросом по скоростям, два луча практически неразличимы.

Двухлучевой усилитель не состоялся как прибор, но он стал каноническим примером для описания волновых неустойчивостей в теории колебаний и волн: два взаимодействующих встречных потока – пример системы с абсолютной неустойчивостью, два одинаково направленных – конвективной.

При абсолютной неустойчивости среди нарастающих возмущений находятся такие, которые не покидают заданной области, то есть в каждой точке этой области возмущение растет.

Если же возмущение, нарастающее во времени, покидает рассматриваемую область, убегает из нее, то имеет место конвективная (сносовая) неустойчивость. Необычайно важную роль в теории волн в электронных потоках сыграло введение понятий о волнах с положительной и отрицательной энергией (впоследствии эти понятия стали основными в теории неравновесных сред независимо от их природы). Понятие о волнах с отрицательной энергией впервые появилось в СВЧ-электронике. Было показано, что с МВПЗ в электронном пучке связан поток отрицательной кинетической мощности.

Поясним важность этого факта на примере. Было установлено, что в системе координат, движущейся с невозмущенной скоростью потока, дрейфующий (предварительно модулированный) электронный пучок эквивалентен в смысле протекающих волновых процессов длинной линии без потерь. В силу такой аналогии может показаться, что, поскольку в подвижной системе координат волны пространственного заряда распространяются в разные стороны, МВПЗ прямая, БВПЗ встречная. Но это неверно, так как если  $\omega_q = \text{const}$ , то, по определению, групповая скорость обеих волн

$$v_{gp} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \left[ \frac{\partial(\omega/v_0 \pm \omega_q/v_0)}{\partial \omega} \right]^{-1} = v_0,$$

то есть равна переносной скорости электронного потока. Правильность объяснения состоит в том, что БВПЗ – волна с положительной энергией, а МВПЗ – с отрицательной. По физическому смыслу волны с отрицательной энергией – это такие волны, с ростом амплитуд которых суммарная энергия системы среда–волна уменьшается. Очевидно, что волнам с положительной

# ФИЗИКА

энергией соответствуют те, с ростом амплитуды которых полная энергия системы среда—волна увеличивается. Было показано, что в МВПЗ возмущение скорости  $v_m$  находятся в противофазе с возмущениями плотности  $\rho_m$  объемного заряда, а в БВПЗ ( $v_b$  и  $\rho_b$ ) — в фазе. Из сказанного следует, что для БВПЗ в области, где возмущение приводит к увеличению  $\rho_b$ , скорость движения частиц больше  $v_0$ , а там, где плотность уменьшилась, скорость электронов меньше  $v_0$ . Поэтому при возбуждении БВПЗ в потоке преобладают ускоренные по сравнению с  $v_0$  электроны, и результирующая кинетическая энергия, переносимая пучком, больше энергии невозмущенного пучка. Если же возбуждена МВПЗ, то в тех случаях, где образуется сгущение (увеличение  $\rho_m$ ), скорость электронов, наоборот, меньше  $v_0$  и больше там, где возникает разрежение (уменьшение  $\rho_m$ ). В результате при возбуждении в электронном потоке МВПЗ в нем преобладают замедленные по сравнению с  $v_0$  электроны, и энергия, переносимая таким пучком, меньше, чем энергия пучка без волны.

Понятно, что для того, например, чтобы в среде возникла волна с отрицательной энергией, волна должна иметь возможность отдавать часть своей энергии среде или другим волнам. Взаимодействие волн с отрицательной энергией с волнами с положительной энергией должно сопровождаться неустойчивостью — обе волны будут расти по амплитуде. Так появились изящная волновая картина физических процессов в СВЧ-лампах с длительным взаимодействием электронов и волны и ее не менее изящное математическое оформление — теория связанных волн. Особенно наглядно и просто можно проследить за процессами, когда во взаимодействии участвуют всего две волны. С этих позиций конвективная неустойчивость в двухлучевой лампе объясняется взаимодействием МВПЗ одного потока с БВПЗ другого. Естественно, что в разное время возникал вопрос: а существуют ли нелинейные аналоги описанных выше волн?

## 2. ЮБИЛЕЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Во время солитонного бума появились работы, в которых уравнения, описывающие электронный поток или тот или иной СВЧ-прибор, сводились к одному из эталонных уравнений теории нелинейных волн, чаще всего к уравнению Кортевега—де Фриса (КдФ)<sup>1</sup>. Остановимся кратко на этом уравнении и его решении в виде единичной волны — солитона.

<sup>1</sup> Мы не останавливаемся на введении понятия единичных волн и солитонов, поскольку в “Соросовском Образовательном Журнале” была опубликована статья Л.И. Маневича “Линейная и нелинейная математическая физика: от гармонических волн к солитонам” (1996. № 1. С. 86–93), где эти вопросы обсуждались.

Уравнению КдФ более ста лет, если считать, что впервые оно явно выписано в статье Кортевега и де Фриса (Korteweg D.J., de Vries G. On the Change of Form of Long Waves Advancing in Rectangular Channel, and on a New Type of Long Stationary Waves // Philos. Mag. 1895. Vol. 39. P. 422–443). Это официальная дата, хотя раньше уравнение появилось в докторской диссертации Густава де Фриса, которая и послужила основой знаменитой статьи 1895 года. Существует мнение, что это уравнение косвенно возникает в исследованиях 1871–1877 годов французского физика Жозефа Валантена Буссинеска. Но истории было угодно, чтобы открытие уравнения стало навсегда связано с именами известного голландского физика и механика Дидерика Иоганна Кортевега и преподавателя математики в голландских гимназиях Густава де Фриса.

Д.И. Кортевег (1848–1941) был учеником Я.Д. Вандер-Ваальса. Его первая докторская диссертация (1878) была посвящена движению вязкой жидкости в упругой трубе применительно к артериальному течению крови. С 1881 по 1918 год Кортевег возглавлял в Амстердамском университете кафедру математики и механики. Весьма занятно, что в биографических статьях о Кортевеге нет упоминания о его работе о волнах на воде и, более того, нет ссылки на совместную работу с де Фрисом.

Судя по всему, ни Кортевег, ни де Фрис не знали об исследованиях Буссинеска. Де Фрис после защиты диссертации преподавал в гимназиях и опубликовал в “Трудах Голландской королевской академии наук” две статьи о циклонах. Больше о нем ничего не известно.

В диссертации де Фриса уравнение КдФ было получено для описания длинных гравитационных волн в невязкой несжимаемой жидкости конечной глубины, причем в качестве переменной использовалось смещение свободной поверхности жидкости до равновесного уровня. Несомненная ценность уравнения КдФ в том, что оно является модельным (иногда говорят, эталонным) для любой физической системы с приближенным законом дисперсии

$$\frac{\omega}{k} = c_0(1 - bk^2) \quad (30)$$

и слабой квадратичной нелинейностью. Здесь  $b \ll l$ ,  $l$  — характерный масштаб длины вдоль направления распространения волны,  $c_0$  — фазовая скорость линейных бездисперсных волн,  $k$  — волновое число.

В общем случае, когда нелинейные и дисперсионные добавки в исходных уравнениях, описывающих распространение волн, одного порядка величины и

# ФИЗИКА

малы по сравнению с линейными членами, уравнение одноволнового приближения имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [c_0 + v(u)] \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (31)$$

Оно может быть приближенно получено из (1) следующим образом. Если при малых возмущениях  $u$  изменяется как  $e^{j(\omega t - kx)}$ , то имеет место соответствие  $j\omega \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $-jk \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}$ . Тогда, используя (1), можно написать уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Добавив, как любят говорить теоретики, “руками” в это уравнение нелинейное слагаемое  $v(u) \frac{\partial u}{\partial x}$ , приходим к уравнению (2). В уравнении (2) все переменные безразмерные:  $x$  – продольная координата,  $t$  – время,  $u(x, t)$  – функция, характеризующая процесс,  $\beta = c_0 b = \text{const}$ . Предположим, что  $v(u) = u$ , то есть имеет место простейшая квадратичная нелинейность. Тогда в системе координат, движущейся со скоростью  $c_0$ , находим более распространенную форму уравнения КдФ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (32)$$

При помощи уравнения (3) из (2) для перехода в движущуюся систему координат введены  $x_h = x - c_0 t$  и  $t_h = t$ , а индекс “ $h$ ” далее опущен.

Современный интерес к уравнению (3) и непрекращающийся поток публикаций, связанных с изучением (3) и родственных ему уравнений, был инициирован Н.Дж. Забуски и М.Д. Крускалом, которые в 1965 году переоткрыли солитон.

Солитону, как известно, соответствует полная компенсация изменений, происходящих в волне за счет дисперсионных свойств среды, изменениями, связанными с ее нелинейностью. Аналитическое решение уравнения (3), соответствующее одиночному возвышению или единенной волне – солитону, записывается в виде

$$u(x, t) = u_{\max} \operatorname{ch}^{-2} \frac{x - Vt}{\Delta}, \quad (33)$$

где  $u_{\max} = 3V$ ,  $V$  – постоянная скорость солитона,  $\Delta$  – характерная ширина солитона. Решение (4) удовлетворяет уравнению КдФ при выполнении равенств

$$\frac{4\beta}{\Delta^2} = V, \quad \frac{6\beta}{\Delta^2} = \frac{u_{\max}}{2},$$

из которых следует, что, чем большую амплитуду имеет солитон, тем он уже и тем больше его скорость.

У солитонов есть еще одно свойство, выделяющее их из семейства уединенных волн. Это свойство положено в одно из рабочих определений солитона, которое звучит так: солитон – это уединенная волна, сохраняющая форму и скорость после столкновения с другой такой же уединенной волной. Термин “солитон” во многом связан именно с таким частицоподобным поведением волн.

Уже упоминалось, что уравнение (3) получалось и из исходных уравнений, описывающих электронный поток, стандартными методами, включающими различные приближения. Очевидно, что при таком подходе всегда остается вопрос о применении полученного результата. Более того, как показал анализ, солитонные решения имеют место в таком диапазоне параметров, где реальные СВЧ-приборы не используют. Снять сомнение могут либо нахождение точного решения исходных уравнений, либо вычислительный эксперимент.

### 3. УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В ЭЛЕКТРОННОМ ПОТОКЕ<sup>1</sup>

Рассмотрим цилиндрический электронный поток радиуса  $r_1$ , сфокусированный бесконечно сильным продольным магнитным полем, который движется вдоль оси трубы радиуса  $r_2$  с идеально проводящими стенками (ось трубы совпадает с осью  $x$ ). Предположим, что постоянная составляющая плотности электронного потока скомпенсирована ионным фоном. Возмущения скорости таковы, что обгона одних электронов другими не происходит и справедливы гидродинамические уравнения движения и непрерывности

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (34)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0. \quad (35)$$

Переменные в уравнениях (5) и (6) безразмерные и нормированы следующим образом: скорость  $v$  и плотность  $\rho$  объемного заряда отнесены к невозмущенным значениям  $v_0$  и  $\rho_0$ , потенциал поля пространственного заряда  $\varphi$  – к  $t v_0^2 / e$ , время – к  $\omega_p^{-1}$ , а координата – к  $v_0 / \omega_p$  (заметим, что  $\omega_q = \omega_p$  при  $R = 1$ ).

Для потенциала  $\varphi$  используем уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - k_\perp^2 \varphi = \rho - 1, \quad (36)$$

<sup>1</sup> В этом разделе изложены результаты, полученные в кандидатской диссертации Н.М. Рыскина (1996), выполненной под руководством автора.

# ФИЗИКА

$$k_{\perp}^2 = \frac{\alpha}{r_1}, \quad 1 \leq \alpha \leq 2.$$

Будем искать стационарные волны, то есть решения, зависящие от  $\theta = x - ut$ , где  $u = \text{const}$  – скорость стационарной волны. Тогда  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \theta}$ , а  $\frac{\partial}{\partial t} = -u \frac{\partial}{\partial \theta}$  и уравнения (5) и (6) принимают вид

$$(v - u) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$-u \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}.$$

Интегрируя эти уравнения с граничными условиями

$$v = 1, \quad \rho = 1, \quad \varphi = 0 \quad \text{при } \theta \rightarrow \pm\infty \quad (37)$$

и используя полученные соотношения в уравнении (7), приходим к уравнению “нелинейного осциллятора”

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = k_{\perp}^2 \varphi + \left[ 1 + \frac{2\varphi}{(1-u)^2} \right]^{-1/2} - 1. \quad (38)$$

Потенциальная энергия этого осциллятора описывается функцией

$$U(\varphi) = \varphi - \frac{k_{\perp}^2 \varphi^2}{2} + (1-u)^2 \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{(1-u)^2}} \right]. \quad (39)$$

Заметим, что если  $\left| \frac{2\varphi}{(1-u)^2} \right| \ll 1$  (слабая нелинейность), то, разлагая правые части соотношений (9) и (10) в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка малости, можно получить уравнения, имеющие решения в виде КdФ-солитонов.

Анализ уравнения (9) с учетом (10) показывает, что уединенная волна может существовать и будет устойчивой при  $1 < M < 2$ , где  $M = k_{\perp}^2 |1-u|$ . Исследование

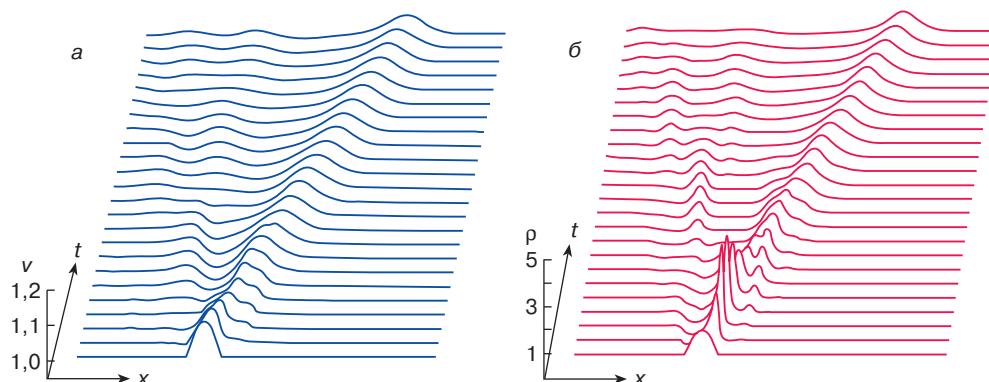
также показывает, что скорость быстрой уединенной волны всегда больше, а медленной меньше, чем соответствующие фазовые скорости линейных волн пространственного заряда.

Точное решение задачи удается найти лишь в неявной форме. При этом удается показать, что скорость *v* и уединенной волны пропорциональна ее амплитуде  $v_{\max}$ , но связь между этими величинами иная, чем для КdФ-солитонов.

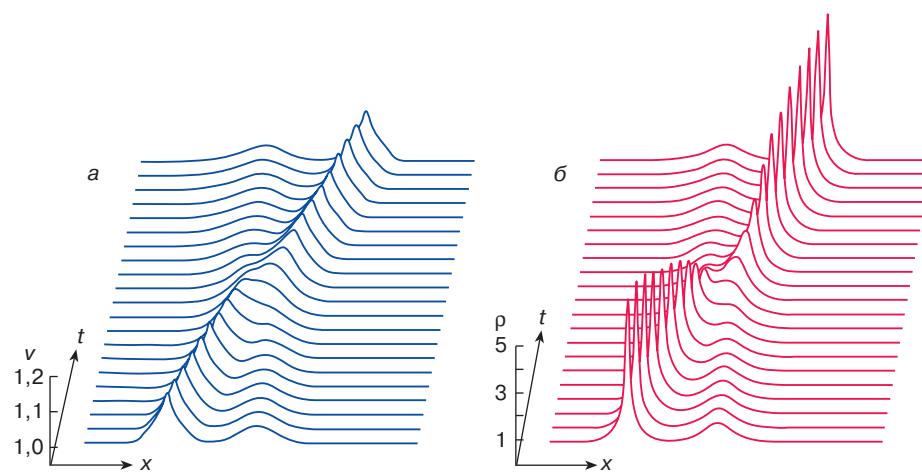
Непосредственное численное решение исходных уравнений проводилось в системе координат, которая движется со скоростью электронного потока. На рис. 2 представлен пример образования быстрой уединенной волны пространственного заряда и осциллирующего “хвоста” малой амплитуды. Вычислительный эксперимент показал, что в процессе эволюции довольно широкого класса начальных возмущений возникают одна или несколько устойчивых уединенных волн, распространяющихся практически без изменения их формы и скорости.

Что происходит при столкновении уединенных волн пространственного заряда? Столкновение попутных волн с высокой степенью точности оказывается упругим (рис. 3, 4), как для КdФ-солитонов. Когда амплитуды волн близки, столкновение происходит без образования одиночного пика (рис. 4). Быстрая и медленная волна (встречные волны) сталкиваются неупруго (рис. 5).

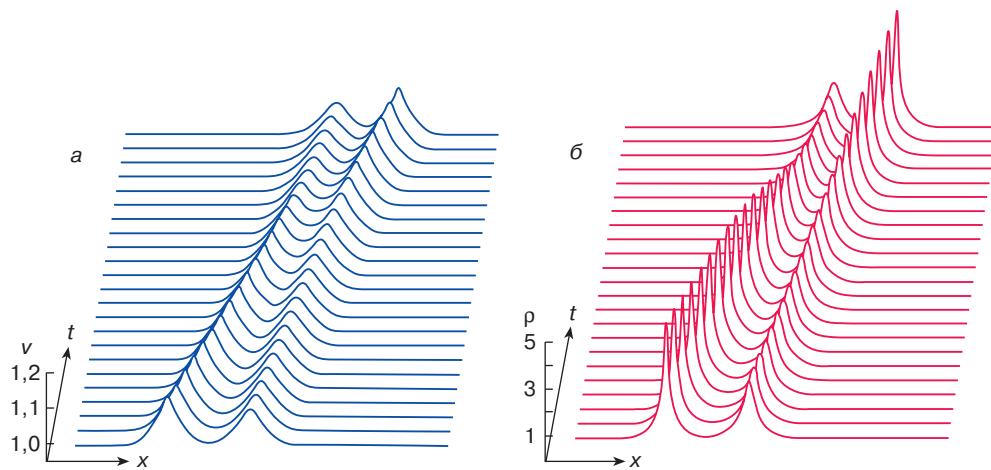
Отметим, что только столкновение попутных волн можно, по крайней мере качественно, описать с помощью КdФ-уравнения, включая различия во взаимодействии волн с близкими и сильно различающимися амплитудами.



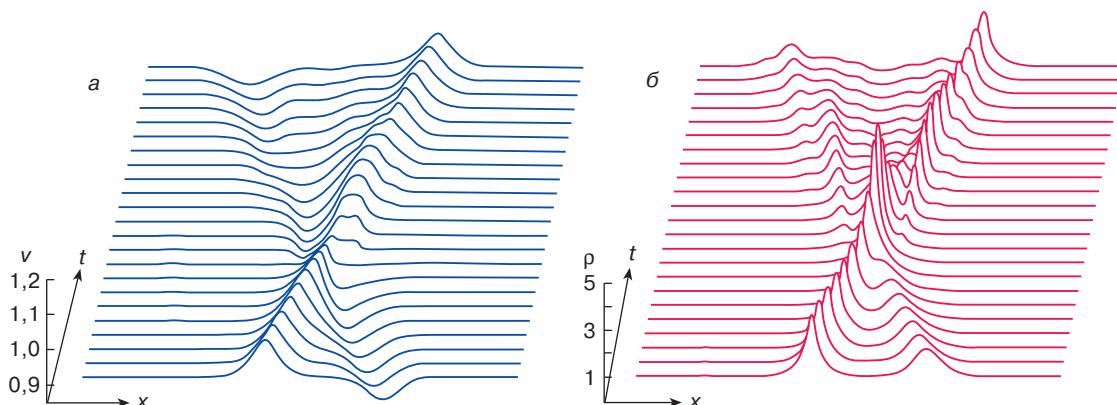
**Рис. 2.** Образование уединенной волны и осциллирующего хвоста при эволюции начального возмущения: *а* – скорость электронов, *б* – плотность заряда



**Рис. 3.** Взаимодействие двух быстрых уединенных волн с сильно различающимися амплитудами: *а* – скорость электронов, *б* – плотность заряда



**Рис. 4.** Взаимодействие двух быстрых уединенных волн с близкими амплитудами, при котором одиночный пик не образуется: *а* – скорость электронов, *б* – плотность заряда



**Рис. 5.** Взаимодействие быстрой и медленной уединенных волн, при котором появляются неупругие эффекты: *а* – скорость электронов, *б* – плотность заряда

# ФИЗИКА

## ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ И СПИСКА РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Изложенные результаты позволяют утверждать, что уединенные волны пространственного заряда существуют. Они отличаются от КдФ-солитонов, хотя по некоторым свойствам и близки к ним.

Если читатель заинтересовался волнами пространственного заряда и КдФ-уравнением, то может заглянуть в следующие книги и статьи:

1. Шевчик В.Н., Шведов Г.Н., Соболева А.В. Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1962. 336 с.

Несмотря на давний год издания, книга, имеющая характер энциклопедического обзора, может служить прекрасным введением в линейную теорию волн пространственного заряда.

2. Филиппов А.Т. Многогликий солитон. М.: Наука, 1990. 288 с.

Прекрасный популярный рассказ о колебаниях и волнах, в частности о солитонах.

3. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.

Пожалуй, одна из лучших учебных монографий о солитонах. В книге приведено много хороших задач.

4. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.; 2-е изд. 1992. 456 с.

В учебном пособии для студентов излагаются необходимые сведения и о волнах пространственного заряда, и о солитонах.

5. Рыскин Н.М. Уединенные волны пространственного заряда // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 84–91.

В этой статье читатель найдет подробности математического анализа, детали вычислений и т.п., соответствующие результатам, приведенным в данной статье. В частности, в статье изложены детали получения уравнения (9) и соотношения (10).

6. Трубецков Д.И. Колебания и волны для гуманитариев. Саратов: Изд-во гос. учеб.-науч. центра “Колледж”, 1997. 391 с.

В учебном пособии для студентов вузов есть глава “Нелинейные волны”, где дано описание солитонов. Кроме того, в главе “Линейные волны” изложена история открытия ЛБВ и приведено качественное описание физических процессов в ней.

7. Пирс Дж. Электроны, волны и сообщения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1964.

В научно-популярной книге одного из создателей ЛБВ даны ее описание, принцип работы и много любопытных фактов из истории создания лампы.

*Рецензент статьи* В.В. Осипов

\* \* \*

Дмитрий Иванович Трубецков, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, зав. кафедрой электроники, колебаний и волн, ректор Саратовского государственного университета. Область научных интересов – радиофизика, сверхвысокочастотная электроника, теория колебаний и волн, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор 15 монографий и учебных пособий и более 200 статей.