# АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ – ОБОБЩЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. В. СИЛЬВЕСТРОВ
*Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, Чебоксары*

**AUTOMORPHIC FUNCTIONS AS A GENERALIZATION OF PERIODIC FUNCTIONS**

V. V. SIL'VESTROV

*A definition and examples of automorphic functions are given. Their applicability for solving certain types of equations is discussed.*

*Приведены определение и примеры автоморфных функций. Обсуждены возможности применения их для решения некоторых типов уравнений.*

www.issep.rssi.ru

© Сильвестров В.В., 2000

## ВВЕДЕНИЕ

Главным свойством периодической функции является то, что она во всех точках, получаемых друг из друга в результате сдвигов на период и кратные ему числа, принимает одно и то же значение. Потребности математики в области теории чисел, геометрии, топологии, дифференциальных уравнений и теории групп привели к появлению в XIX веке нового класса функций, принимающих одинаковые значения в точках, получаемых друг из друга в результате более сложных преобразований, чем параллельный перенос. Эти функции, обобщающие периодические и названные автоморфными, в последующем нашли широкое применение во многих других разделах математики и иных наук.

В статье приведены определение и примеры автоморфных функций в классическом смысле и рассмотрены возможности их применения для решения определенных типов рациональных и трансцендентных уравнений.

## ПОНЯТИЕ АВТОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ

Вспомним определение периодической функции. Функция $f(x)$, определенная на числовом множестве $X$, называется периодической, если существует такое число $\omega \neq 0$, называемое периодом, что для любого $x \in X$ выполняются условия

$$x + \omega \in X, \qquad x - \omega \in X; \tag{1}$$

$$f(x + \omega) = f(x), \qquad f(x - \omega) = f(x). \tag{2}$$

Если среди периодов функции имеется наименьший положительный период $\omega_0$ – основной период, то условия (1), (2) равносильны условиям

$$f(x + n\omega_0) = f(x), \qquad x \in X, \qquad n \in \mathbf{Z}. \tag{3}$$

Обозначим $T_n(x) = x + n\omega_0$. Тогда условия (3) можно записать в виде

$$f(T_n(x)) = f(x), \qquad x \in X, \qquad n \in \mathbf{Z}, \tag{4}$$

или

$$f(T(x)) = f(x), \qquad x \in X, \qquad T \in \Gamma, \qquad (5)$$

где через Γ обозначено множество всех линейных функций (преобразований) $T = T_n(x)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Множества Γ и $X$ обладают следующими свойствами. Для любых функций $T$ и $S$ из Γ их суперпозиция $(T \circ S)(x) = T(S(x))$ и обратная функция $T^{-1}$ также принадлежат Γ, причем операция суперпозиции ассоциативна: $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$. Такое множество Γ называется группой [1, 2]. В свою очередь, множество $X$ таково, что для любой точки $x \in X$ и любой функции $T \in \Gamma$ точка $T(x)$ также принадлежит множеству $X$, то есть $T(X) = X$. Такое множество $X$ называется инвариантным (неизменным) относительно группы Γ, и в частности относительно преобразования $T(x)$.

Вернемся к условиям (4) и (5). В общем случае функции $T_n$ и $T$ в этих условиях могут быть и нелинейными. Тогда говорить о периодической функции в обычном смысле уже нельзя.

Пусть множество (область) $X$ инвариантно относительно преобразования $T(x)$ (необязательно линейного) и функция $f(x)$, определенная на $X$, удовлетворяет условию (5). Тогда функция $f(x)$ называется инвариантной относительно преобразования $T(x)$ на множестве $X$, а $T(x)$ – инвариантом функции $f(x)$. Если указанные условия выполняются для всех преобразований множества Γ, в частности группы, то $f(x)$ называется инвариантной относительно Γ. Если, кроме того, функция $f(x)$ дифференцируема (то есть имеет производную) на $X$, то она называется автоморфной на $X$ относительно Γ, или Γ-автоморфной на $X$. В частности, из условий (3) или (4) следует, что любая периодическая функция с основным периодом $\omega_0$ является инвариантной относительно преобразований $T_n(x) = x + n\omega_0$, $n \in \mathbf{Z}$, образующих так называемую однопериодическую группу, а периодическая дифференцируемая функция является автоморфной относительно этой группы.

В определениях инвариантной и автоморфной функций преобразование $T(x)$ необязательно является линейным. Оно может быть линейным, дробно-линейным, рациональным и т.д. В классической теории автоморфных функций рассматриваются в основном группы дробно-линейных преобразований $T(x) = (ax + b)/(cx + d)$, $ad - bc \neq 0$. Например, множество преобразований

$$T_0(x) = x, \quad T_1(x) = -x, \quad T_2(x) = \frac{1}{x}, \quad T_3(x) = -\frac{1}{x} \qquad (6)$$

образует группу, а функция $f(x) = x^2 + 1/x^2$, удовлетворяющая условиям $f(x) = f(-x) = f(1/x) = f(-1/x)$ и имеющая производную при всех $x \neq 0$, является автоморфной относительно этой группы. А вот $2\pi$-периодическая дифференцируемая функция $\cos x$, удовлетворяющая условиям $\cos(x + 2\pi n) = \cos x$, $\cos(-x + 2\pi n) = \cos(-x) = \cos x$, $n \in \mathbf{Z}$, является автоморфной (значит, и инвариантной) не только относительно однопериодической группы линейных преобразований $T_n(x) = x + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, но и группы преобразований $\pm x + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Аналогично функция $\sin x$ автоморфна относительно группы преобразований $2\pi n + x$, $2\pi n + \pi - x$, $n \in \mathbf{Z}$. В то же время не любая периодическая функция является автоморфной. Например, функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное,} \\ 0, & \text{если } x \text{ нерациональное,} \end{cases}$$

является периодической, для которой любое рациональное число является периодом. Однако она ни в одной точке не имеет производную и даже не является непрерывной. Следовательно, она не является автоморфной в смысле приведенного выше определения, хотя является инвариантной относительно линейного преобразования $T(x) = x + r$, где $r$ – любое рациональное число.

Таким образом, понятие инвариантности является более общим, чем понятие автоморфности, которое, в свою очередь, при дополнительном условии дифференцируемости функции является более общим, чем понятие периодичности.

Классическая теория автоморфных функций в приведенном выше смысле заложена Ф. Клейном и А. Пуанкаре в XIX веке. К настоящему времени наиболее подробно изучены автоморфные функции одного переменного [3–5], установлена их связь с другими разделами математики: теорией групп, алгебраической и неевклидовой геометрией, дифференциальными уравнениями, теорией чисел. В XX веке интенсивное развитие получили теория автоморфных функций многих переменных и различные обобщения автоморфных функций, в частности в направлении замены условий (5) более общими:

$$f(T(x)) = a(x)f(x) + b(x), \qquad x \in X, \qquad T \in \Gamma,$$

где $T(x)$ – инварианты множества $X$ (необязательно дробно-линейные), образующие группу Γ, и $a(x)$, $b(x)$ – заданные функции.

**Задача 1.** Пусть Γ – группа, состоящая из конечного числа дробно-линейных преобразований $T_n(x)$, $n = 1, 2, \dots, m$, и $g(x)$ – рациональная функция. Покажите, что функция

$$f(x) = g(T_1(x)) + g(T_2(x)) + \dots + g(T_n(x))$$

автоморфна относительно Γ в области определения функции.

## ПРИМЕНЕНИЕ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Свойство автоморфности, а также более общее свойство инвариантности функции можно использовать для решения некоторых типов уравнений.

1. Пусть функция $f(x)$ инвариантна относительно преобразований $T(x)$, $S(x)$, ... на множестве $X$, то есть $f(T(x)) = f(x)$, $f(S(x)) = f(x)$, ... и преобразования $T(x)$, $S(x)$, ... образуют группу Г, то есть суперпозиции $(T \circ S)(x)$ любых двух преобразований из Г и обратные преобразования $T^{-1}(x)$ также принадлежат Г. Тогда из условий

$$g(x) = T(h(x)), \quad T \in \Gamma, \quad g(x) \in X \text{ (или } h(x) \in X) \tag{7}$$

следует равенство

$$f(g(x)) = f(h(x)), \qquad g(x) \in X \text{ (или } h(x) \in X). \tag{8}$$

Следовательно, все решения уравнений (7), где $T$ пробегает преобразования группы Г, будут также решениями уравнения (8). Однако при этом могут быть получены не все решения уравнения (8).

**Пример 1.** Решить уравнение

$$\frac{((2x-6)^2 - 2x + 7)^3}{4(x-3)^2(2x-7)^2} = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{(x(x-1))^2}. \tag{9}$$

Обозначив правую часть уравнения через $f(x)$, запишем его в виде $f(2x - 6) = f(x)$, то есть в виде (8), где $g(x) = 2x - 6$, $h(x) = x$ и $X = \mathbf{R}\backslash\{0; 1\}$. Нетрудно показать, что функция $f(x)$ инвариантна относительно преобразований

$$T_0(x) = x, \qquad T_1(x) = 1 - x, \qquad T_2(x) = \frac{1}{x},$$
$$T_3(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad T_4(x) = \frac{x-1}{x}, \qquad T_5(x) = \frac{x}{x-1}, \tag{10}$$

образующих так называемую группу ангармонических соотношений. Точнее, $f(x)$ как функция, дифференцируемая при всех $x \ne 0$ и $x \ne 1$, автоморфна относительно Г на $\mathbf{R}\backslash\{0; 1\}$. Учитывая, что $T_3(x) = T_2(T_1(x))$, $T_4(x) = T_1(T_2(x))$, $T_5(x) = T_3(T_2(x))$, для этого достаточно показать выполнение равенств $f(T_1(x)) = f(x)$ и $f(T_2(x)) = f(x)$. Покажите это. Следовательно, все решения уравнений (7), где вместо $T$ надо брать $T_0$, $T_1$, ..., $T_5$, то есть уравнений

$$2x - 6 = T_n(x), \qquad n = 0, 1, ..., 5,$$

являются также решениями исходного уравнения (9). Подставив в эти уравнения вместо $T_n(x)$ их выражения, найдем 10 корней:

$$6; \quad \frac{7}{3}; \quad \frac{3 \pm \sqrt{11}}{2}; \quad \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2}; \quad \frac{7 \pm \sqrt{41}}{4}; \quad \frac{9 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

Уравнение (9) при дополнительном условии, что знаменатели дробей отличны от нуля, равносильно алгебраическому уравнению 10-й степени, получаемому из него по свойству пропорции. Следовательно, оно больше 10 действительных корней иметь не может, поэтому найденные числа образуют все множество корней уравнения (9).

Данный пример подсказан соросовским доцентом И.И. Чучаевым, которому автор выражает благодарность за это.

2. Укажем еще один случай, когда множество решений уравнения (8) совпадает с множеством решений совокупности уравнений (7). Пусть множество $X$ инвариантно относительно преобразований группы Г и подмножество $X_0 \subset X$ таково, что для любых различных преобразований $T \in \Gamma$ и $S \in \Gamma$ подмножества $T(X_0)$ и $S(X_0)$ не имеют между собой общих точек, а объединение всех подмножеств $T(X_0)$, $T \in \Gamma$, совпадает с $X$. Такое подмножество $X_0$ называется фундаментальным множеством (областью) группы Г на множестве $X$. Для каждой группы ее фундаментальное множество $X_0$ можно выбрать разными способами. Например, для однопериодической группы линейных преобразований $T_n(x) = x + n\omega_0$, $n \in \mathbf{Z}$, в качестве $X_0$ можно взять любой полуотрезок $[a; a + \omega_0)$ длины $\omega_0$, для группы преобразований (6) – полуотрезок (0; 1], а для группы ангармонических соотношений (10) – полуотрезок (0; 1/2] или луч $[2; +\infty)$.

Так как любая группа преобразований содержит тождественное преобразование $T(x) = x$, то одно из подмножеств $T(X_0)$ совпадает с $X_0$. Тогда из условий (5) следует, что на множествах $T(X_0)$, $T \in \Gamma$, автоморфная или инвариантная функция $f(x)$ имеет те же свойства, что и на множестве $X_0$, то есть $f(x)$ достаточно изучать на $X_0$. В частности, если автоморфная или инвариантная функция $f(x)$ каждое свое значение на фундаментальном множестве $X_0$ принимает лишь один раз, то на множествах $T(X_0)$, $T \in \Gamma$, она каждое свое значение принимает также лишь один раз. Следовательно, в данном случае множество решений уравнения (8) будет совпадать с множеством решений совокупности уравнений (7). Это имеет место, например, если $f(x)$ строго монотонна на множестве $X_0$.

**Пример 2.** Решить уравнение

$$\ln\{2x\} - \operatorname{ctg}\pi(2x - 1) = \ln\{x^2\} + \operatorname{tg}\pi\left(x^2 + \frac{1}{2}\right),$$

где {...} означает дробную часть числа.

Учитывая, что $\{2x\} = \{2x - 1\}$, $\operatorname{tg}\pi\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\pi x^2$,

запишем уравнение в виде

$$\ln\{2x - 1\} - \operatorname{ctg}\pi(2x - 1) = \ln\{x^2\} - \operatorname{ctg}\pi x^2, \tag{11}$$

откуда, обозначив $f(x) = \ln\{x\} - \operatorname{ctg}\pi x$, получим $f(2x-1) = f(x^2)$, то есть уравнение (8), где $g(x) = 2x-1$, $h(x) = x^2$, а $X = \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$ есть область определения функции $f(x)$. Эта функция периодична с основным периодом 1, то есть инвариантна относительно преобразований $T_n(x) = x + n$, $n \in \mathbf{Z}$, и в интервале (фундаментальной области) $X_0 = (0, 1)$ имеет производную

$$f'(x) = (\ln x - \operatorname{ctg}\pi x)' = \frac{1}{x} + \frac{\pi}{\sin^2\pi x} > 0,$$

поэтому строго монотонно возрастает, то есть в $X_0$ она каждое свое значение принимает лишь один раз. Следовательно, уравнение (11) равносильно совокупности уравнений

$$2x-1 = T_n(x^2),\qquad n\in\mathbf{Z},\qquad (2x-1)\in X \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 2x-1 = x^2+n,\qquad n\in\mathbf{Z},\qquad (2x-1)\notin\mathbf{Z}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad x = 1\pm\sqrt{n},\qquad n\in\mathbf{Z},\qquad n\geq 0,\qquad 2\sqrt{n}\notin\mathbf{Z},$$

откуда найдем все корни исходного уравнения: $x = 1\pm\sqrt{n}$, где $n$ – любое натуральное число, большее 1 и отличное от чисел $2^2, 3^2, \ldots$

Другие интересные примеры, при решении которых используется свойство инвариантности функций, читатель найдет в статье [6].

**Задача 2.** Решить уравнения

1) $\dfrac{1}{4-x^2} + \dfrac{x^2}{4x^2-1} = \dfrac{1}{4-(5+3x)^2} + \dfrac{(3x+5)^2}{(10+6x)^2-1}$;

2) $9\cos x + 2^{\cos 2x} = 2^{\cos(\pi+2x^2)} - 9\sin x^2$.

Ответы и указания.

1) $-\dfrac{5}{2}$; $-\dfrac{5}{4}$; $\dfrac{-5\pm\sqrt{37}}{6}$; $\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$. Левая часть уравнения есть функция, автоморфная относительно группы преобразований (6);

2) $\dfrac{1\pm\sqrt{1+2\pi(4n-1)}}{2}$; $\dfrac{-1\pm\sqrt{1+2\pi(4n-1)}}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$ Левая часть уравнения инвариантна на $\mathbf{R}$ относительно группы преобразований $\pm x + 2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, и на фундаментальном множестве $X_0 = [0; \pi)$ она каждое свое значение принимает лишь один раз.

Автор выражает благодарность профессору В.А. Ильину за ценные замечания и советы по улучшению содержания статьи в плане ее доступности большему кругу читателей.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Ольшанский А.Ю.* Групповые исчисления // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 10. С. 114–119.
2. *Шеврин Л.Н.* Как возникают группы при изучении полугрупп // Там же. 1997. № 11. С. 114–119.
3. *Форд Л.Р.* Автоморфные функции. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 340 с.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье.
5. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968. 618 с.
6. *Чучаев И.И., Мещерякова С.И.* Уравнения вида $f(g(x)) = f(h(x))$ и нестандартные методы решения // Математика в школе. 1995. № 3. С. 48–54.


*Рецензент статьи* В.А. Ильин

* * *

Василий Васильевич Сильвестров, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова. Область научных интересов – приложения теории функций комплексного переменного в механике. Автор и соавтор более 60 научных статей и двух учебных пособий.