

КАК СМЯТЬ ПАКЕТ ОТ МОЛОКА, ЧТОБЫ В НЕГО ВОШЛО БОЛЬШЕ

В. А. АЛЕКСАНДРОВ

Новосибирский государственный университет

HOW ONE CAN CRUSH A MILK CARTON IN SUCH A WAY AS TO ENLARGE ITS VOLUME

V. A. ALEXANDROV

To crush a polyhedral surface one has to mark new edges on it and break its faces along those new edges. A popular presentation of a recently discovered and intuitively subtle fact that the surface of a right tetrahedron can be crushed in such a way as to enlarge its volume is given. The article can be used at subsidiary reading in geometry in secondary schools.

Смять многогранную поверхность – это значит, наметив на ней новые ребра, переломить по ним уже имеющиеся грани. В статье популярно рассказано о недавно открытом интуитивно неочевидном факте, согласно которому поверхность правильного тетраэдра можно смять так, что ограничиваемый ею объем увеличится. Статья может быть использована на факультативных занятиях по геометрии в школах.

www.issep.rssi.ru

ВВЕДЕНИЕ

Продолжим начатый в [1] разговор о недавно открытых неожиданных фактах теории многогранников, не вошедших еще в популярную литературу.

Безусловно, вы многократно держали в руках пакеты с соком, молоком или йогуртом, сделанные из картона и полиэтиленовой пленки. Поэтому вы легко знаете, что грани такого пакета нельзя растягивать или сжимать. Нельзя и надуть пакет, превратив его в сферу. Но пакет можно мять!

С математической точки зрения смять пакет – это значит, наметив на нем новые ребра, переломить по ним уже имеющиеся грани пакета. В результате получится новая (уже не выпуклая) многогранная поверхность.

Интуиция говорит, что объем смятого пакета меньше, чем у исходного. Мы же в данной статье покажем, что если мять умеючи, то объем может и возрасти!

Для определенности будем рассуждать о пакете, имеющем изначально форму правильного тетраэдра (в 70-е годы именно такие пакеты были распространены в нашей стране повсеместно).

Представление о предлагаемом решении дает рис. 1. Чтобы получить изображенную на нем многогранную поверхность, надо надломить каждое ребро тетраэдра посередине, приблизив середину ребра к центру тетраэдра. При этом прилегающая к ребру часть грани тетраэдра тоже загнется к центру и на месте надлома образуются два узких треугольника. Оставшаяся же часть каждой грани тетраэдра превратится в объединение четырех треугольников.

Надламывая ребра внутрь тетраэдра, мы, конечно, уменьшаем его объем. Но при этом средние части граней выпячиваются наружу, увеличивая объем. Только вычисления могут разрешить этот спор между уменьшением и увеличением. Однако ответ можно сообщить уже сейчас: действуя по изложенной схеме и правильно

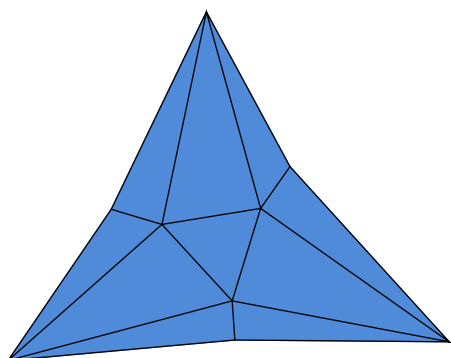


Рис. 1

выбирая степень излома ребер можно увеличить объем тетраэдра на 37,7%!

ПОСТРОЕНИЕ ДЕФОРМАЦИИ

Пусть O – центр правильного тетраэдра со стороной 1 и A_1, A_2, A_3 – вершины одной из его граней (рис. 2). Зададим число $0 < t \leq 1$ (его значение будет уточняться по мере наших рассуждений) и введем следующие обозначения: B_1 – середина отрезка A_2A_3 , B_2 – середина отрезка A_1A_3 , B_3 – середина отрезка A_1A_2 , P – центр грани $A_1A_2A_3$; $A_i(t)$ – точка отрезка OA_i такая, что $OA_i(t) = tOA_i$, то есть такая, что длина отрезка $OA_i(t)$ равна произведению числа t на длину отрезка OA_i ($i = 1, 2, 3$); $B_i(t)$ – точка отрезка OB_i такая, что $OB_i(t) = tOB_i$ ($i = 1, 2, 3$); $P(t)$ – точка отрезка OP такая, что $OP(t) = tOP$; $C_i(t)$ – точка

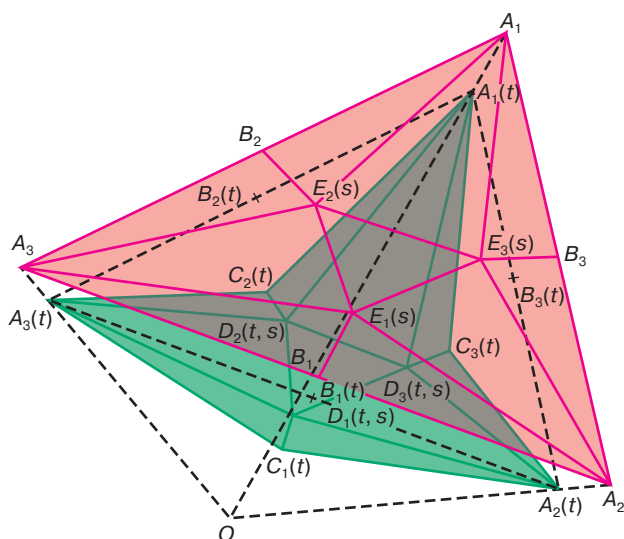


Рис. 2

отрезка $OB_i(t)$ такая, что $C_i(t)A_j(t) = 1/2$ при любом $j = 1, 2, 3$, отличном от i .

Чтобы читатель имел возможность лучше освоиться с введенными обозначениями, отметим, что $C_i(1) = B_i$.

Зададим еще число $0 \leq s \leq PB_1 = A_1B_1/3 = \sqrt{3}/6$ и обозначим через $D_1(t, s)$ точку, лежащую на луче, выходящем из точки $C_1(t)$, перпендикулярном плоскости треугольника OA_2A_3 и направленном внутрь тетраэдра $OA_1A_2A_3$, и такую, что $D_1(t, s)C_1(t) = s$. Аналогично построим точки $D_2(t, s)$ и $D_3(t, s)$. Наконец, на отрезке A_1B_1 найдем точку $E_1(s)$ так, чтобы $B_1E_1(s) = s$.

В результате таких построений мы разбили грань $A_1A_2A_3$ исходного тетраэдра с центром O на десять треугольников $A_1B_2E_2(s)$, $A_1E_2(s)E_3(s)$, $A_1E_3(s)B_3$, $A_2B_3E_3(s)$, $A_2E_3(s)E_1(s)$, $A_2E_1(s)B_1$, $A_3B_1E_1(s)$, $A_3E_1(s)E_2(s)$, $A_3E_2(s)B_2$ и $E_1(s)E_2(s)E_3(s)$, изображенных на рис. 2 красными линиями. Условимся называть поверхность, составленную из этих линий, красной. Помимо этого мы построили десять новых треугольников $A_1(t)C_2(t)D_2(t, s)$, $A_1(t)D_2(t, s)D_3(t, s)$, $A_1(t)D_3(t, s)C_3(t)$, $A_2(t)C_3(t)D_3(t, s)$, $A_2(t)D_3(t, s)D_1(t, s)$, $A_2(t)D_1(t, s)C_1(t)$, $A_3(t)C_1(t)D_1(t, s)$, $A_3(t)D_1(t, s)D_2(t, s)$, $A_3(t)D_2(t, s)C_2(t)$ и $D_1(t, s)D_2(t, s)D_3(t, s)$, изображенных на рис. 2 зелеными линиями. Условимся называть поверхность, составленную из этих треугольников, зеленой.

Непосредственно из описанных выше построений вытекает, что если при данном t число s подобрано так, что

$$D_1(t, s)D_2(t, s) = E_1(s)E_2(s), \tag{1}$$

то красная и зеленая поверхности одинаково составлены из попарно одинаковых треугольников.

Возвращаясь к сказанному во введении и к рис. 1, можно сказать, что красным цветом на рис. 2 изображены новые ребра, отмеченные на одной из граней исходного тетраэдра. Зеленая поверхность на рис. 2 изображает грань после смятия. Остальные грани тетраэдра нужно смять точно так же. Возможность стыковки смятых граней обеспечивается тем, что точка $C_1(t)$ лежит в плоскости OA_2A_3 , а точки $C_2(t)$ и $C_3(t)$ – в плоскостях OA_1A_3 и OA_1A_2 соответственно.

Отметим еще, что, например, отрезок $A_1(t)C_2(t)$ не изображен на рис. 1 потому, что после склеивания всех четырех зеленых поверхностей треугольник $A_1(t)C_2(t)D_2(t, s)$ располагается в одной плоскости с приклеиваемым к нему по ребру $A_1(t)C_2(t)$ треугольником другой зеленой поверхности (ведь прямая $C_2(t)D_2(t, s)$ перпендикулярна плоскости OA_1A_3 , а значит, оба рассматриваемых треугольника лежат в плоскости, проходящей через точки $A_1(t)$ и $C_2(t)$ и перпендикулярной плоскости OA_1A_3).

В основном описании нужной нам деформации поверхности тетраэдра закончено. Чтобы завершить его, нам осталось для каждого t выяснить, какое именно значение должен принимать параметр s , чтобы соблюдалось условие (1). Приступая к решению этой задачи, обозначим через E'_1 и E'_2 основания перпендикуляров, опущенных из точек $E_1(s)$ и $E_2(s)$ на прямую B_1B_2 (рис. 3).

Тогда, с одной стороны, имеем

$$B_1B_2 = \frac{A_1A_2}{2} = \frac{1}{2}, \quad \angle E_1(s)B_1E'_1 = 30^\circ,$$

$$B_1E'_1 = B_1E_1 \cos \angle E_1(s)B_1E'_1 = \frac{s\sqrt{3}}{2},$$

$$E_1(s)E_2(s) = B_1B_2 - B_1E'_1 - B_2E'_2 = \frac{1}{2} - s\sqrt{3}.$$

С другой стороны, произведем в плоскости OA_1B_1 следующие построения, изображенные на рис. 4:

$C'_1(t)$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки $C_1(t)$ на прямую $A_1(t)B_1(t)$;

$D'_1(t, s)$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки $D_1(t, s)$ на прямую $A_1(t)B_1(t)$;

F — точка пересечения прямых $C_1(t)D_1(t, s)$ и OP ;

$P''(t, s)$ — точка пересечения плоскости треугольника $D_1(t, s)D_2(t, s)D_3(t, s)$ и прямой OP ;

α — общее значение углов $\angle A_1B_1O$, $\angle C_1(t)B_1(t)C'_1(t)$ и $\angle C_1(t)FO$.

Используя введенные обозначения, имеем из рис. 4 $A_1B_1 = \sqrt{3}/2$ как высота в правильном треугольнике со стороной 1;

$$B_1(t)P(t) = tB_1P = \frac{tA_1B_1}{3} = \frac{t\sqrt{3}}{6};$$

из прямоугольного треугольника $A_3(t)B_1(t)C_1(t)$ на рис. 2:

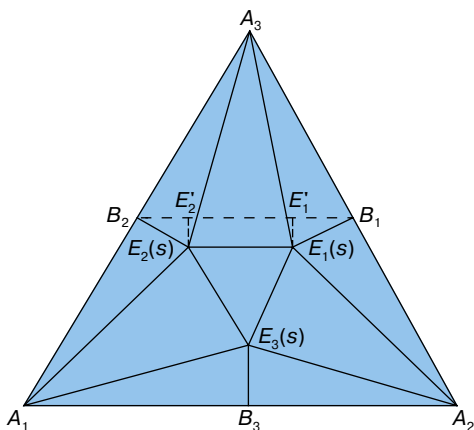


Рис. 3

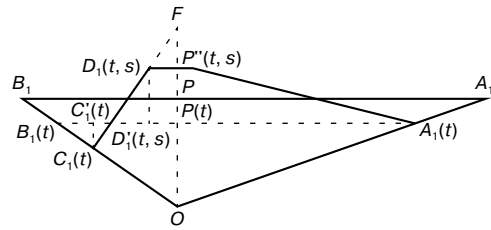


Рис. 4

$$B_1(t)C_1(t) = \sqrt{[A_3(t)C_1(t)]^2 - [A_3(t)B_1(t)]^2} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{2};$$

из рис. 4: $B_1P = A_1B_1/3 = \sqrt{3}/6$, так как P — центр правильного треугольника $A_1A_2A_3$; $OP = \sqrt{6}/12$ как радиус шара, вписанного в правильный тетраэдр со стороной 1 (числовое значение можно найти, например, в [2], но лучше проделайте соответствующие вычисления самостоятельно).

Из прямоугольного треугольника B_1OP на рис. 4 $\cos \alpha = B_1P/B_1O = \sqrt{6}/3$; из формулы $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ находим $\sin \alpha = \sqrt{3}/3$. Из прямоугольного треугольника $B_1(t)C_1(t)C'_1(t)$ на рис. 4

$$B_1(t)C'_1(t) = B_1(t)C_1(t) \cos \alpha = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{6}}.$$

Из рис. 4 $C'_1(t)D'_1(t, s) = C_1(t)D_1(t, s) \sin \alpha = s\sqrt{3}/3$;

$$\begin{aligned} D_1(t, s)P''(t, s) &= D'_1(t, s)P(t) = \\ &= B_1(t)P(t) - B_1(t)C'_1(t) - C'_1(t)D'_1(t, s) = \\ &= \frac{t - 2s - \sqrt{2}\sqrt{1-t^2}}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

В силу симметрии построений, приведших к зеленой поверхности, изображенной на рис. 2, зеленая поверхность совместится сама с собой после поворота вокруг прямой OP на угол 120° . Поэтому точка $P''(t, s)$ является центром правильного треугольника $D_1(t, s)D_2(t, s)D_3(t, s)$, а отрезок $D_1(t, s)P''(t, s)$ — радиусом вписанной в него окружности. Поэтому

$$D_1(t, s)D_2(t, s) = \sqrt{3}D_1(t, s)P''(t, s) = \frac{t - 2s - \sqrt{2}\sqrt{1-t^2}}{2}.$$

Окончательно соотношение (1) принимает вид

$$\frac{1}{2} - s\sqrt{3} = \frac{t - 2s - \sqrt{2}\sqrt{1-t^2}}{2}$$

или

$$s = \frac{1 - t + \sqrt{2}\sqrt{1 - t^2}}{2(\sqrt{3} - 1)}. \quad (2)$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА

Сравним рис. 1 и 5. Многогранник, изображенный на последнем, получен из смятого тетраэдра, изображенного на рис. 1, добавлением четырех желтых тетраэдров. Каждый из них примыкает к смятому тетраэдру по своей грани, обозначенной на рис. 2 через $D_1(t, s)D_2(t, s)D_3(t, s)$, и имеет в качестве новых ребер отрезки, один из которых обозначен на рис. 4 через $D_1(t, s)F$.

Обозначим длину отрезка $D_1(t, s)F$ через r . Поскольку отрезки $D_1(t, s)F$ и $C_1(t)D_1(t, s)$, изображенные на рис. 4, лежат на одной прямой, то, апеллируя к рис. 5, мы можем представить смятый тетраэдр как правильный тетраэдр T со стороной $2s + 2r$ (три из его вершин, а также окрашенные в желтый цвет прилегающие к ним части его граней видны на рис. 5), к которому добавлены четыре шестиугольные пирамиды P , окрашенные на рис. 5 в зеленый цвет, и от которого следует отрезать четыре тетраэдра Q со стороной r , окрашенные на рис. 5 в желтый цвет.

Дадим дополнительные пояснения к конструкции многогранника, изображенного на рис. 5, с помощью рис. 2 и 4. Отрезок $C_1(t)F$ представляет собой половину ребра тетраэдра T , а отрезок $D_1(t, s)F$ – все ребро тетраэдра Q . Для одной из шестиугольных пирамид P точка $A_1(t)$ является вершиной, а точки $C_2(t), D_2(t, s)$,

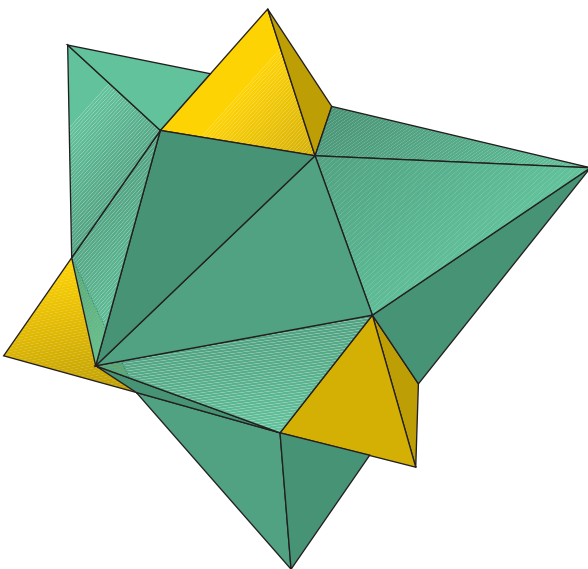


Рис. 5

$D_3(t, s)$ и $C_3(t)$ являются вершинами основания (впрочем, это основание имеет и другие вершины, не изображенные на рис. 2).

Введем новую переменную $x = 2(r + s)$ и будем искать объем V смятого тетраэдра как функцию от x : $V = V(x)$. Обозначая объем многогранника R через $\text{vol } R$, можно записать основную идею последующих вычислений в виде

$$V(x) = \text{vol } T + 4\text{vol } P - 4\text{vol } Q. \quad (3)$$

Воспользовавшись известной формулой, выражающей объем правильного тетраэдра через длину его ребра, получим

$$\text{vol } T = \frac{\sqrt{2}x^3}{12}.$$

По той же формуле найдем и объем тетраэдра Q : он также является правильным, поскольку отрезан от правильного тетраэдра T плоскостью, параллельной плоскости основания (докажите самостоятельно, что плоскость $D_1(t, s)D_2(t, s)D_3(t, s)$ действительно параллельна грани тетраэдра T , противоположной вершине F). Для вычисления длины ребра тетраэдра Q заметим, что отрезки $D_1(t, s)D_2(t, s)$ и $D_1(t, s)F$ являются его ребрами. Поэтому в соответствии с (1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{t - 2s - \sqrt{2}\sqrt{1 - t^2}}{2} &= D_1(t, s)D_2(t, s) = \\ &= D_1(t, s)F = r = \frac{x}{2} - s. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x = t - \sqrt{2}\sqrt{1 - t^2}, \quad (4)$$

что с учетом (2) дает

$$\begin{aligned} r &= \frac{x}{2} - \frac{1 - (t - \sqrt{2}\sqrt{1 - t^2})}{2(\sqrt{3} - 1)} = \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1 - x}{2(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3}x - 1}{2(\sqrt{3} - 1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Значит,

$$\text{vol } Q = \frac{\sqrt{2}}{12}r^3 = \frac{\sqrt{2}}{96}\left(\frac{\sqrt{3}x - 1}{\sqrt{3} - 1}\right)^3.$$

Объем пирамиды P найдем как одну треть произведения площади основания на высоту. На рис. 6 зеленым закрашено основание пирамиды P , указаны длины его сторон и отмечены некоторые из ранее встречавшихся в наших рассуждениях точек (см. рис. 2). Продолжив стороны основания, имеющие длину $2s$, получим равнобедренный треугольник KLM со стороной $x = 2(r + s)$,

изображенный на рис. 6. (Доказательство равносходности оставляем читателю.) Теперь площадь основания $S_{\text{осн}}$ может быть найдена как разность площади правильного треугольника KLM со стороной x и утроенной площади правильного треугольника $KD_1(t, s)D_3(t, s)$ со стороной r : $S_{\text{осн}} = \sqrt{3}(x^2 - 3r^2)/4$. С учетом (5) последняя формула может быть переписана в виде

$$S_{\text{осн}} = \frac{\sqrt{3}}{16} \left[4x^2 - 3 \left(\frac{\sqrt{3}x - 1}{\sqrt{3} - 1} \right)^2 \right].$$

Перейдем к нахождению высоты H пирамиды P . Основание перпендикулярно, опущенного из вершины пирамиды P , обозначим через N . (На рис. 6 точка N изображена, а на и без того перегруженном рис. 2 читателю предлагается достроить точку N самостоятельно, опустив перпендикуляр из точки $A_2(t)$ на плоскость $C_1(t)D_1(t, s)D_3(t, s)$.) Поскольку N — центр правильного треугольника KLM , то $C_1(t)N$ — радиус окружности, вписанной в этот треугольник (докажите оба этих утверждения самостоятельно). Значит, $C_1(t)N = \sqrt{3}x/6$. Таким образом, в прямоугольном треугольнике $A_2(t)C_1(t)N$ мы знаем гипотенузу $A_2(t)C_1(t) = A_2B_1 = 1/2$ и катет $C_1(t)N = \sqrt{3}x/6$. Поэтому

$$H = A_2(t)N = \sqrt{[A_2(t)C_1(t)]^2 - [C_1(t)N]^2} = \sqrt{3}\sqrt{3 - x^2}/6.$$

Следовательно, объем пирамиды P

$$\text{vol } P = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H = \frac{\sqrt{3 - x^2}}{96} \left[4x^2 - 3 \left(\frac{\sqrt{3}x - 1}{\sqrt{3} - 1} \right)^2 \right].$$

Подставляя в (3) найденные выражения для $\text{vol } T$, $\text{vol } Q$ и $\text{vol } P$, получим следующую формулу для объема смятого тетраэдра:

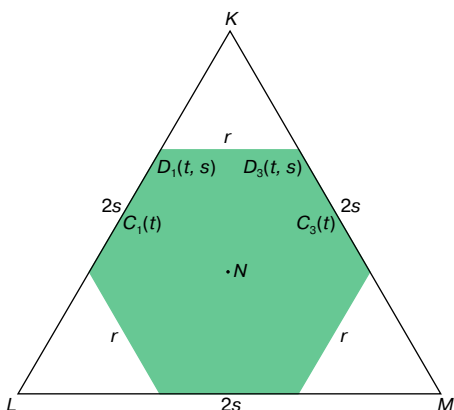


Рис. 6

$$V(x) = \frac{\sqrt{2}}{12} x^3 + \frac{\sqrt{3 - x^2}}{24} \left[4x^2 - 3 \left(\frac{\sqrt{3}x - 1}{\sqrt{3} - 1} \right)^2 \right] - \frac{\sqrt{2}}{24} \left(\frac{\sqrt{3}x - 1}{\sqrt{3} - 1} \right)^2. \quad (6)$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЪЕМА

Теперь нам предстоит найти такие значения параметров t и s , участвовавших в построении смятого тетраэдра, чтобы объем смятого тетраэдра превышал объем исходного тетраэдра в максимальное число раз. Другими словами, нам предстоит найти максимальное значение функции $V(x)$.

Помимо чисто технической проблемы, связанной со сложностью формулы (6), перед нами стоит и концептуальная проблема, связанная с тем, что (6) выражает объем как функцию от некоторого вспомогательного параметра x , появляющегося лишь на заключительной стадии построения смятого тетраэдра.

Начнем со второй проблемы. Выше мы конструировали смятый тетраэдр в таком порядке. Сначала мы задали число t и нашли для него число s по формуле (2), которая гарантирует, что после замены каждой грани исходного тетраэдра зеленой поверхностью, изображенной на рис. 2, эти зеленые поверхности склеятся между собой и образуют смятый тетраэдр. Число x в этих построениях появляется как вспомогательный параметр, удобный в вычислениях.

Однако можно поступать и наоборот: сначала, задав разумное число x , найти параметр t из уравнения (4), затем параметр s из уравнения (2) и только после этого приступить собственно к построениям смятого тетраэдра. Таким образом, становится понятным, что зависимость функции $V(x)$ в формуле (6) от параметра x , а не от t и s не создает для нас принципиальных проблем. Нужно только понять, на каком интервале изменения параметра x нам следует искать максимум функции $V(x)$. Другими словами, необходимо выяснить, какой интервал изменения параметра x соответствует геометрически допустимым значениям параметров t и s .

Как видно из построения точек $E_i(s)$ (или из рис. 3), параметр s заключен в пределах $0 \leq s \leq \sqrt{3}/6$. Из соотношения $x = 2(r + s)$ и формулы (5) находим $s = x/2 - r = (1 - x)/(2\sqrt{3} - 2)$. Решив неравенство

$$0 \leq \frac{1 - x}{2(\sqrt{3} - 1)} \leq \frac{\sqrt{3}}{6},$$

получим, что вспомогательная переменная x во всяком случае заключена в пределах $1/\sqrt{3} \leq x \leq 1$. На этом интервале и будем искать максимум функции $V(x)$, а

найдя его, убедимся, что он соответствует геометрически допустимому значению параметра t .

Наконец, отметим, что значение параметра $x = 1$ соответствует исходному правильному тетраэдру.

Сложность формулы (6) не позволяет найти точное значение x_0 параметра x , при котором функция $V(x)$ достигает максимума. Такие функции исследуют приближенными методами. График функции $V(x)/V(1)$, построенный численно на компьютере, изображен на рис. 7.

Из него видно, что на интервале $[1/\sqrt{3}, 1]$ функция $V(x)/V(1)$ достигает максимума всего в одной точке x_0 . Расчеты дают для x_0 следующее приближенное значение: $x_0 = 0,801732$. Это соответствует следующим значениям: $t = 0,73012$, $s = 0,13542$ и $V(x_0)/V(1) = 1,37718$. Вот вам и обещанные 37,7%!

Любопытно отметить, что в пределах точности компьютерных вычислений каждая из шестиугольных пирамид P смятого тетраэдра максимального объема оказывается правильной. В частности, найденные значения параметров t и s действительно являются геометрически допустимыми.

Другой, несколько неожиданный факт, вытекающий из рис. 7, состоит в том, что объем $V(x)$ смятого тетраэдра почти всегда превосходит объем исходного правильного тетраэдра $V(1)$ (исключение составляют значения x , близкие к $1/\sqrt{3}$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разные категории школьников могут по-разному использовать данную статью. Шестикласснику можно

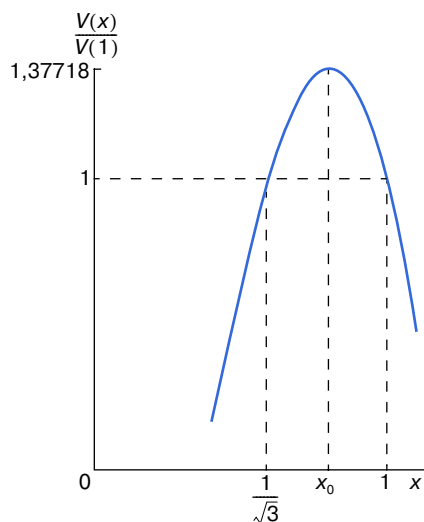


Рис. 7

предложить склеить картонную модель и понять суть проблемы на уровне введения. Девятикласснику может быть интересно разобраться в деталях доказательства или самому написать компьютерную программу для рисования графика функции $V(x)$ и расчета параметров смятого тетраэдра максимального объема. Наиболее увлеченные геометрией школьники могут попытаться предложить свой способ сминания тетраэдра с тем, чтобы увеличить его объем более чем на 37,7%. Ведь мы доказали только, что, следуя описанному выше способу сминания, можно увеличить объем на 37,7%. Но мы не утверждаем, что при другом способе сминания нельзя увеличить объем еще больше.

На сегодня не установлен даже факт существования такой поверхности, которая получена сминанием поверхности правильного тетраэдра и ограничивает объем, который больше или равен объему, ограничиваемому любой другой поверхностью, полученной сминанием поверхности того же тетраэдра. Учитывая, что общих подходов к этой проблеме не наблюдается, можно ожидать появления в ближайшем будущем публикаций, в которых разгорится борьба за увеличение числа 37,7%. Это и есть “математика с минимумом сырого материала”, блестяще представленная в [3], перед которой все равны (или почти равны) – и школьник, и профессор.

Сюжет, изложенный в данной статье, имеет довольно длинную и интригующую историю. Петербургский математик В.А. Залгаллер опубликовал свою первую работу по этой ветви теории многогранников еще в 1958 году. Затем он неоднократно возвращался к этой проблематике совместно с Ю.Д. Бураго, и, наконец, в 1995 году они опубликовали статью [4], в которой доказали, что в трехмерном евклидовом пространстве существует выпуклый многогранник, поверхность которого можно смять так, что она ограничит больший объем. Однако уже в 1996 году вышла статья [5] американского математика Д. Бликера, в которой показано, что поверхность любого выпуклого многогранника после подходящего сминания ограничит больший объем. Там же Д. Бликер подсчитал, на сколько сминанием можно увеличить объем каждого из правильных многогранников: тетраэдра, октаэдра, куба, икосаэдра и додекаэдра. Настоящая статья является популярным пересказом лишь части статьи [5]. Любопытно, что хотя статья [5] и вышла позже, чем [4], но в печать она сдана раньше. Вот сколь сурова математика к своим приверженцам: ни годы работы, ни предыдущие заслуги не идут в зачет. Наиболее эффектный результат данной проблематики вчистую достался Д. Бликеру, для которого статья [5] – первая работа по многогранникам.

Предвидя вопрос о приложениях, надо сказать, что едва ли изложенная выше конструкция заинтересует фирмы, специализирующиеся на упаковке жидких пищевых продуктов. По-видимому, при выборе формы пакета главенствующую роль играет технологичность его изготовления и перевозки. А в этом отношении параллелепипед вне конкуренции. Так что наиболее разумным приложением представляется картонная модель описанного выше многогранника, украшающая школьный кабинет математики и вызывающая интерес учащихся.

Видимо, уместно публично ответить и на такой каверзный вопрос. В статье [1] говорилось, что объем любого изгибаемого многогранника не изменяется в процессе деформации. Так как же мы сейчас рассуждаем о его увеличении? Здесь надо иметь в виду, что смятый тетраэдр не получен непрерывным изгибанием из правильного тетраэдра. Переход от одного к другому осуществляется скачком. Если бы мы захотели делать это плавно, уменьшая параметр t начиная от $t = 1$, то обнаружили бы, что точки $E_i(s)$, $i = 1, 2, 3$, меняют свое положение на грани исходного тетраэдра (см. рис. 2). При этом, например, новая грань $A_1E_2(s)E_3(s)$ исходного правильного тетраэдра будет менять свои размеры при изменении t . Но это и показывает, что в данной статье мы имеем дело не с непрерывным изгибанием правильного тетраэдра: согласно [1], в процессе непрерывного изгибания размеры и форма каждой, в том числе и новой, грани не должны изменяться.

Наконец, традиционный вопрос: что еще почитать? Смятый тетраэдр в популярной литературе ранее не появлялся ввиду своей молодости. О многогранниках же вообще блестяще написано, например, в [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.А. Изгибаемые многогранные поверхности // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 5. С. 112–117.
2. Бескин Л.Н., Бескин В.Л. Многогранники. Киев: Вища шк., 1984. 86 с.
3. Литлвуд Дж. Математическая смесь: Пер. с англ. 3-е изд. М.: Наука, 1973. 143 с.
4. Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. Изометрические кусочно-линейные погружения двумерных многообразий с полиэдральной метрикой в \mathbb{R}^3 // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, № 3. С. 76–95.
5. Bleecker D. Volume Increasing Isometric Deformations of Convex Polyhedra // J. Diff. Geom. 1996. Vol. 43, № 3. P. 505–526.
6. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия: Пер. с нем. 3-е изд. М.: Наука, 1981. 344 с.
7. Левитин К. Геометрическая рапсодия. М.: Знание, 1976. 144 с.

Рецензент статьи Л.И. Маневич

* * *

Виктор Алексеевич Александров, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики физического факультета Новосибирского государственного университета. Область научных интересов – нелинейные и нелокальные проблемы геометрии и математического анализа. Автор 37 научных работ.