СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И СКОРОСТЕЙ ВОЗРАСТАНИЯ ФУНКЦИЙ

В. А. ИЛЬИН

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

COMPARISON OF INFINITESIMAL SEQUENCES AND OF THE RATES OF FUNCTIONS' GROWTH

V. A. IL'IN

Relying on the comparison of the simplest infinitesimal sequences, the rates of growth (as $x \longrightarrow +\infty$) for the most important functions: $\ln x$, x^α (for $\alpha > 0$), a^x (for $a > 1$), $\Gamma(x)$ and x^x, the Stirling formula $\frac{\Gamma(x+1)}{x^x} = \frac{\sqrt{2\pi x}}{e^x}[1+\alpha(x)]$ with an asymptotic expansion of $\alpha(x)$ in the powers of $\frac{1}{x}$ is established.

Опираясь на сравнение простейших бесконечно малых последовательностей, мы сравнили скорости возрастания при $x \longrightarrow +\infty$ важнейших функций $\ln x$, x^α (при $\alpha > 0$), a^x (при $a > 1$), $\Gamma(x)$ и x^x, а также установили формулу Стирлинга $\frac{\Gamma(x+1)}{x^x} = \frac{\sqrt{2\pi x}}{e^x}[1+\alpha(x)]$ с асимптотическим разложением $\alpha(x)$ по степеням $\frac{1}{x}$.

© Ильин В.А., 2000

ВВЕДЕНИЕ

В математике и ее приложениях постоянно приходится иметь дело с простейшими элементарными функциями $\ln x$, x^α (при $\alpha > 0$), a^x (при $a > 1$), а также с функциями $\Gamma(x)$ и x^x, где $\Gamma(x)$ – так называемая гамма-функция Эйлера, совпадающая при $x = n + 1$, где n – натуральное число, с числом $n!$.

Каждая из указанных пяти функций неограниченно возрастает на полупрямой $1 \le x < +\infty$. При этом сразу же возникает необходимость сравнения между собой скоростей возрастания при $x \longrightarrow +\infty$ указанных функций. Более тонкие исследования приводят к необходимости изучения поведения при $x \longrightarrow +\infty$ отношения указанных функций. Примером такого исследования может служить установление так называемой формулы Стирлинга, утверждающей, что при больших x

$$\frac{\Gamma(x+1)}{x^x} = \frac{\sqrt{2\pi x}}{e^x}[1+\alpha(x)],$$

где функция $\alpha(x)$ стремится к нулю при $x \longrightarrow +\infty$, то есть является бесконечно малой при $x \longrightarrow +\infty$ функцией.

Еще более глубокий анализ позволяет написать сколько угодно членов разложения указанной бесконечно малой при $x \longrightarrow +\infty$ функции $\alpha(x)$ по степеням $\frac{1}{x}$ (такое разложение в математике принято называть асимптотическим).

В статье мы проведем изучение всех перечисленных вопросов, опираясь только на аппарат сравнения между собой бесконечно малых последовательностей чисел и на использование формулы бинома Ньютона.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. Последовательность чисел a_1, a_2, ..., a_n, ..., кратко обозначаемая символом $\{a_n\}$, называется *бесконечно малой*, если для любого как угодно малого положительного числа ε найдется номер N такой, что все элементы a_n этой последовательности с номерами n, превосходящими N, удовлетворяют неравенству $|a_n| < \varepsilon$.

Из этого определения следует, что последовательность $\{a_n\}$ является бесконечно малой, если существует равный нулю предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Определение 2. Функция $f(x)$, определенная на полупрямой $1 \le x < +\infty$, называется *бесконечно малой* (соответственно бесконечно большой) при $x \longrightarrow +\infty$, если для любого как угодно малого положительного числа ε (соответственно для любого как угодно большого положительного числа A) найдется число $x_0 > 0$ такое, что для любого значения аргумента x, удовлетворяющего условию $x \ge x_0$, справедливо неравенство $|f(x)| < \varepsilon$ (соответственно $|f(x)| > A$).

Элементарно проверяется, что если функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \longrightarrow +\infty$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \longrightarrow +\infty$.

Действительно, фиксировав произвольное $\varepsilon > 0$ и взяв $A = 1/\varepsilon$, получим, что в силу того, что функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \longrightarrow +\infty$, найдется число x_0 такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $x \ge x_0$, справедливо неравенство $|f(x)| > A = 1/\varepsilon$, которое эквивалентно неравенству $|1/f(x)| < \varepsilon$.

Далее заметим, что если функция $f(x)$, определенная на полупрямой $1 \le x < +\infty$, является бесконечно малой при $x \longrightarrow +\infty$, то числовая последовательность $\{f(n)\}$ является бесконечно малой.

Из курса средней школы известно, что каждая из трех функций

$$\ln x, \qquad x^{\alpha} \ (\text{при } \alpha > 0), \qquad a^{x} \ (\text{при } a > 1) \qquad (1)$$

монотонно возрастает на полупрямой $1 \le x < +\infty$ и стремится к бесконечности при $x \longrightarrow +\infty$. Отсюда и из определения 2 вытекает, что каждая из трех функций (1) является бесконечно большой при $x \longrightarrow +\infty$. Поэтому каждая из трех функций

$$\frac{1}{\ln x}, \qquad \frac{1}{x^{\alpha}} \ (\text{при } \alpha > 0), \qquad \frac{1}{a^{x}} \ (\text{при } a > 1) \qquad (2)$$

является бесконечно малой при $x \longrightarrow +\infty$. Отсюда, в свою очередь, следует, что каждая из трех числовых последовательностей

$$\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}, \qquad \left\{\frac{1}{n^{\alpha}}\right\} \ (\text{при } \alpha > 0), \qquad \left\{\frac{1}{a^{n}}\right\} \ (\text{при } a > 1) \ (3)$$

является бесконечно малой.

Естественно возникает вопрос о сравнении скоростей стремления к бесконечности каждой из трех функций (1) при $x \longrightarrow +\infty$ или, что то же самое, о сравнении скоростей стремления к нулю каждой из трех функций (2) при $x \longrightarrow +\infty$. В терминах последовательностей этот вопрос приводит к сравнению скоростей стремления к нулю трех последовательностей (3).

Определение 3. Если две определенные на полупрямой $1 \le x < +\infty$ функции $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно большими (соответственно бесконечно малыми) при $x \longrightarrow +\infty$, то будем говорить, что функция $g(x)$ является при $x \longrightarrow +\infty$ *бесконечно большой более высокого порядка* (соответственно *бесконечно малой более высокого порядка*), чем $f(x)$, если отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (соответственно отношение $\dfrac{g(x)}{f(x)}$) является бесконечно малой при $x \longrightarrow +\infty$ функцией.

Определение 4. Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – две бесконечно малые последовательности, то будем говорить, что последовательность $\{b_n\}$ является *бесконечно малой более высокого порядка*, чем $\{a_n\}$, если последовательность $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ является бесконечно малой, то есть если существует равный нулю предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n} = 0$.

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Начнем со сравнения между собой бесконечно малых последовательностей (3), добавив к ним еще две бесконечно малые последовательности $\left\{\dfrac{1}{n!}\right\}$ и $\left\{\dfrac{1}{n^{n}}\right\}$[1]. Иными словами, будем сравнивать между собой следующие пять бесконечно малых последовательностей:

---

[1] Бесконечная малость последовательностей $\left\{\dfrac{1}{n!}\right\}$ и $\left\{\dfrac{1}{n^{n}}\right\}$ вытекает из справедливых для всех номеров n неравенств $\dfrac{1}{n!} \le \dfrac{1}{n}$ и $\dfrac{1}{n^{n}} \le \dfrac{1}{n}$ и бесконечной малости последовательности $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$.

$$\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{n^{\alpha}}\right\} \quad (\text{при } \alpha > 0), \quad \left\{\frac{1}{a^{n}}\right\} \quad (\text{при } a > 1) \tag{4}$$
$$\left\{\frac{1}{n!}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{n^{n}}\right\}.$$

Теорема 1. *Каждая из пяти последовательностей* (4), *начиная со второй, является бесконечно малой более высокого порядка, чем последовательность, стоящая слева от нее.*

Единственное, что нам понадобится для доказательства теоремы 1, – это формула бинома Ньютона, утверждающая, что для любого номера n и любого числа h

$$(1+h)^n = 1 + \frac{n}{1}h + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}h^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}h^k + \ldots + \frac{n!}{n!}h^n. \tag{5}$$

Некоторое время назад эта важная формула была исключена из обязательной программы средней школы, и мы предлагаем читателю самому доказать ее методом математической индукции, то есть проверить ее справедливость при $n = 1$ и, предположив, что эта формула справедлива для номера $n \geq 1$, убедиться, что в таком случае эта формула справедлива и для следующего номера $n + 1$.

Для доказательства теоремы 1 в силу определения 4 достаточно доказать существование четырех пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}} = 0 \quad (\text{при } \alpha > 0), \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{a^{n}} = 0 \quad (\text{при } \alpha > 0,\ a > 1), \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n}}{n!} = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n}} = 0. \tag{9}$$

А. Начнем с доказательства существования предела (6). Сначала рассмотрим частный случай $\alpha = 1$, то есть докажем существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0. \tag{10}$$

Так как $\frac{\ln n}{n} = \ln\sqrt[n]{n}$, то в силу непрерывности логарифмической функции $y = \ln x$ в точке $x = 1$ (то есть в силу того, что существует предел этой функции при $x \longrightarrow 1$, равный ее значению в точке $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x) = \ln 1 = 0$) достаточно доказать существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1. \tag{11}$$

Так как при $n > 1$ справедливо неравенство $\sqrt[n]{n} > 1$ [1], то для любого $n > 1$ существует число $\delta_n > 0$ такое, что

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n. \tag{12}$$

Возводя обе части равенства (12) в степень n и используя формулу бинома Ньютона (5), получим

$$n = (1+\delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \underline{\frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2} +$$
$$+ \text{ еще положительные члены.}$$

Так как все члены правой части последнего равенства положительны, то, отбрасывая в правой части этого равенства все члены, кроме подчеркнутого, получим справедливое для любого $n > 1$ неравенство

$$n < \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2,$$

из которого следует, что $\delta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, то есть что последовательность $\{\delta_n\}$ является бесконечно малой. Отсюда в силу (12) вытекает существование предела (11), а потому и предела (10), то есть существование предела (6) при $\alpha = 1$.

Для любого $x > 1$ обозначим символом $[x]$ наибольшее целое число, содержащееся в x [2]. Тогда если положить номер n равным $[x]$, то будут справедливы неравенства $n \leq x < n + 1$. Из этих неравенств, из того, что $n + 1 \leq \leq 2n$ для всех номеров n, и из возрастания логарифмической функции получим для всех $x > 1$ неравенство

$$\frac{\ln x}{x} < \frac{\ln(n+1)}{n} \leq \frac{\ln(2n)}{n} = \frac{\ln 2}{n} + \frac{\ln n}{n}. \tag{13}$$

Так как при $x \longrightarrow +\infty$ и номер $n = [x]$ также стремится к бесконечности, то из неравенства (13), из уже доказанного существования предела (10) и бесконечной малости последовательности $\left\{\frac{\ln 2}{n}\right\}$ вытекает существование предела функции

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0. \tag{14}$$

Убедимся теперь в том, что из существования предела функции (14) вытекает, что при любом фиксированном $\alpha > 0$ существует и предел функции

[1] Ибо положительная степень числа, большего единицы, является числом, большим единицы.

[2] Число $[x]$ обычно называют “антье x” (от фр. entier – целый).

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0. \qquad (15)$$

Действительно, сделав замену $y = x^\alpha$, $x = y^{1/\alpha}$, получим, что

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln y^{1/\alpha}}{y} = \frac{1}{\alpha}\frac{\ln y}{y}. \qquad (16)$$

Из существования предела (14), неравенства (16) и из того, что $y = x^\alpha$ при любом фиксированном $\alpha > 0$ стремится к $+\infty$ при $x \longrightarrow +\infty$, вытекает существование предела функции (15), а из него, в свою очередь, вытекает существование предела последовательности (6) при любом $\alpha > 0$.

Б. Перейдем к доказательству существования предела (7). Так как $a > 1$, то существует число $\delta > 0$ такое, что $a = 1 + \delta$. Обозначим через k наибольшее целое число, содержащееся в $\alpha > 0$, то есть положим $k = [\alpha]$. Используя формулу бинома Ньютона (5) для любого номера n, удовлетворяющего условию $n > k + 2$, получим

$$a^n = (1+\delta)^n = 1 + n\delta + \ldots$$
$$\ldots + \underline{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k-1)}{(k+2)!}\delta^{k+2}} +$$
$$+ \text{ еще положительные члены.} \qquad (17)$$

Оставляя в правой части (17) только один подчеркнутый член, получим неравенство

$$a^n > \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k-1)}{(k+2)!}\delta^{k+2}. \qquad (18)$$

Далее заметим, что так как $k = [\alpha]$, то справедливо неравенство $\alpha < k + 1$ и потому для любого номера n имеет место неравенство

$$n^\alpha \le n^{k+1}. \qquad (19)$$

Из (18) и (19) вытекает, что для любого номера n, удовлетворяющего условию $n > k + 2$, справедливо неравенство

$$\frac{n^\alpha}{a^n} < \frac{(k+2)!}{\delta^{k+2}}\frac{n^{k+1}}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k-1)} =$$
$$= \frac{(k+2)!}{\delta^{k+2}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)}\right\}. \qquad (20)$$

Так как номер $k = [\alpha]$ фиксирован, то при $n \longrightarrow +\infty$ дробь, стоящая в (20) в фигурных скобках, стремится к единице, а потому из неравенства (20) вытекает существование равного нулю предела (7).

В. Докажем теперь существование предела (8). Прежде всего заметим, что существование этого предела нужно доказывать только при $a \ge 1$, ибо при $0 < a < 1$ обе последовательности $\{a^n\}$ и $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ являются бесконечно малыми, а потому и их произведение является бесконечно малой последовательностью.

Обозначим символом $[a]$ наибольшее целое число, содержащееся в $a \ge 1$. Тогда для любого номера n, большего $[a] + 2$, справедливо равенство

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\ldots\frac{a}{[a]}\cdot\left\{\frac{a}{[a]+1}\cdot\frac{a}{[a]+2}\ldots\frac{a}{n-1}\right\}\cdot\frac{a}{n}. \qquad (21)$$

Учитывая, что в фигурных скобках в (21) стоит произведение положительных дробей, каждая из которых меньше единицы, мы получим для любого номера n, большего $[a] + 2$, неравенство

$$\frac{a^n}{n!} \le \frac{a^{[a]+1}}{[a]!}\cdot\frac{1}{n},$$

из которого сразу вытекает существование равного нулю предела (8).

Г. Докажем, наконец, существование предела (9). Так как для любого номера $n > 2$ справедливо

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\cdot\left\{\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\ldots\frac{n}{n!}\right\} \qquad (22)$$

и так как в фигурных скобках в (22) стоит произведение положительных дробей, каждая из которых не превосходит единицы, то для любого номера $n > 2$

$$\frac{n!}{n^n} \le \frac{1}{n},$$

что и доказывает существование предела (9).

СРАВНЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ВОЗРАСТАНИЯ ПРИ $x \longrightarrow +\infty$ ВАЖНЕЙШИХ ФУНКЦИЙ

Перейдем к сравнению скоростей возрастания при $x \longrightarrow +\infty$ трех бесконечно больших при $x \longrightarrow +\infty$ элементарных функций (1), добавив к ним еще две функции: гамма-функцию Эйлера $\Gamma(x + 1)$ и функцию x^x.

Прежде всего дадим определение и кратко опишем простейшие свойства функции $\Gamma(x + 1)$. Эта функция для всех $x > -1$ может быть определена через так называемый несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt, \qquad (23)$$

который можно понимать как сумму двух пределов

$$\lim_{\delta \to 0} \int_\delta^1 t^x e^{-t} dt + \lim_{A \to +\infty} \int_1^A t^x e^{-t} dt. \qquad (24)$$

Можно показать, что первый из пределов (24) существует для любого $x > -1$, а второй из этих пределов – для любого x.

Таким образом, функция $\Gamma(x+1)$ определяется несобственным интегралом (23) для любого $x > -1$.

Далее легко видеть, что

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-t}dt = \lim_{A\to+\infty}[1-e^{-A}] = 1.$$

Кроме того, интегрированием по частям взятого для любого $x > 0$ интеграла (23) устанавливается формула

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Из этой формулы и из того, что $\Gamma(1) = 1$, получаем, что для любого натурального числа n

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Более тонкий анализ показывает, что функция $\Gamma(x+1)$ возрастает на полупрямой $1 \le x < +\infty$.

Отсюда следует, что для любого натурального n значения функции $\Gamma(x+1)$, отвечающие значениям x, лежащим на сегменте $n \le x \le n+1$, удовлетворяют неравенствам

$$n! \le \Gamma(x+1) \le (n+1)!. \tag{25}$$

Займемся теперь сравнением скоростей возрастания при $x \longrightarrow +\infty$ следующих пяти бесконечно больших при $x \longrightarrow +\infty$ функций:

$$\ln x,\quad x^\alpha\ (\text{при } \alpha > 0),\quad a^x\ (\text{при } a > 1),\quad \Gamma(x+1),\quad x^x. \tag{26}$$

Теорема 2. *Каждая из пяти функций (26), начиная со второй, является при $x \longrightarrow +\infty$ бесконечно большой более высокого порядка, чем функция, стоящая слева от нее.*

Для доказательства теоремы 2 в силу определения 3 достаточно доказать существование четырех пределов

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad (\text{при } \alpha > 0), \tag{27}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \quad (\text{при } \alpha > 0,\ a > 1), \tag{28}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{\Gamma(x+1)} = 0, \tag{29}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{x^x} = 0. \tag{30}$$

Существование предела (27), совпадающего с пределом (15), уже установлено выше (при доказательстве теоремы 1).

Для доказательства существования предела (28) обозначим для любого $x \ge 1$ символом $n = [x]$ наибольшее целое число, содержащееся в x. Тогда в силу того, что $n \le x < n+1$ и $n+1 \le 2n$, получим

$$\frac{x^\alpha}{a^x} < \frac{(n+1)^\alpha}{a^n} \le \frac{(2n)^\alpha}{a^n} = 2^\alpha\cdot\frac{n^\alpha}{a^n}.$$

Из последнего неравенства, из того, что $n = [x] \longrightarrow +\infty$ при $x \longrightarrow +\infty$, и из существования предела последовательности (7) вытекает существование предела (28).

Существование предела (29) нужно доказывать только при $a \ge 1$, ибо при $0 < a < 1$ обе функции a^x и $\frac{1}{\Gamma(x+1)}$ являются бесконечно малыми при $x \longrightarrow +\infty$.

Для доказательства существования предела (29) при $a \ge 1$ снова обозначим символом $n = [x]$ наибольшее целое число, содержащееся в x, и заметим, что $n \le x < n+1$. Из последних неравенств и неравенств (25) получим, что

$$\frac{a^x}{\Gamma(x+1)} \le \frac{a^{n+1}}{n!} = a\frac{a^n}{n!}.$$

Из последнего неравенства, из того, что $n = [x] \longrightarrow +\infty$ при $x \longrightarrow +\infty$, и из существования предела последовательности (8) вытекает существование предела (29).

Остается доказать существование предела (30). Снова обозначим символом $n = [x]$ наибольшее целое число, содержащееся в x. Используя неравенства $n \le x < n+1$, $n+1 \le 2n$, $x^x \ge n^x \ge n^n$ и неравенства (25), получим, что для любого $x > 4$

$$\frac{\Gamma(x+1)}{x^x} \le \frac{(n+1)!}{n^n} = \frac{2}{n}\cdot\left\{\frac{3}{n}\cdot\frac{4}{n}\cdots\frac{n}{n}\right\}\cdot\frac{n+1}{n}. \tag{31}$$

Так как все сомножители, стоящие в (31) в фигурных скобках, не превосходят единицы, а дробь $\frac{n+1}{n}$ не превосходит двух, то из (31) получим

$$\frac{\Gamma(x+1)}{x^x} \le \frac{4}{n}. \tag{32}$$

Из неравенства (32), из того, что $n = [x] \longrightarrow +\infty$ при $x \longrightarrow +\infty$, и из бесконечной малости последовательности $\left\{\frac{4}{n}\right\}$ вытекает существование предела (30). Теорема полностью доказана.

ПОНЯТИЕ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ

В заключительной части статьи мы познакомим читателя с весьма актуальной для различных разделов математики и ее приложений идеей получения так называемого асимптотического разложения функции. Эту идею проиллюстрируем на модели получения асимптотического разложения при $x \longrightarrow +\infty$ функции $\frac{\Gamma(x+1)}{x^x}$, стоящей под знаком предела (30).

Мы уже знаем, что эта функция является бесконечно малой при $x \longrightarrow +\infty$. Более глубокий анализ приводит к необходимости выделения главной части этой бесконечно малой функции и разложению этой главной части по степеням $\frac{1}{x}$.

Как известно, функция $\Gamma(x+1)$ определяется интегралом (23):

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt.$$

Если сделать в этом интеграле замену переменной интегрирования, то есть от переменной интегрирования t перейти к новой переменной y, определяемой равенством $t = x(1+y)$, то, поскольку $dt = x dy$, $y = \frac{t}{x} - 1$, $e^{-t} = e^{-x}e^{-xy}$, $t^x = x^x(1+y)^x = x^x e^{x \ln(1+y)}$, получим, что

$$\Gamma(x+1) = \frac{x^{x+1}}{e^x} \int_{-1}^{+\infty} e^{-x[y - \ln(1+y)]} dy. \qquad (33)$$

Введем в рассмотрение функцию $g(y)$, определяемую равенством

$$g(y) = \begin{cases} \sqrt{y - \ln(1+y)} & \text{при} \quad 0 \le y < +\infty, \\ -\sqrt{y - \ln(1+y)} & \text{при} \quad -1 < y < 0. \end{cases} \qquad (34)$$

Тогда $g^2(y) = y - \ln(1+y)$ для всех $y > -1$ и интеграл (33) можно переписать в виде

$$\Gamma(x+1) = \frac{x^{x+1}}{e^x} \int_{-1}^{+\infty} e^{-xg^2(y)} dy. \qquad (35)$$

Из того, что производная функции $g^2(y)$

$$\frac{d}{dy}[g^2(y)] = 1 - \frac{1}{1+y} = \frac{y}{1+y}, \qquad (36)$$

вытекает, что эта производная отрицательна при $-1 < y < 0$ и положительна при $0 < y < +\infty$. Отсюда следует, что функция $g^2(y)$ убывает при $-1 < y < 0$ и возрастает при $0 < y < +\infty$, а это означает, что сама функция $g(y)$, определяемая равенством (34), возрастает на всей полупрямой $-1 < y < +\infty$.

Кроме того, можно убедиться, что у функции $g(y)$ в любой точке y полупрямой $-1 < y < +\infty$ существуют производные любого порядка и для этой функции

$$\lim_{y \to -1} g(y) = -\infty, \qquad \lim_{y \to +\infty} g(y) = +\infty.$$

Но при этих условиях для функции $\tau = g(y)$, определенной на полупрямой $-1 < y < +\infty$, существует обратная функция, которую обозначим символом $y = \varphi(\tau)$, определенная и возрастающая на бесконечной прямой $-\infty < \tau < +\infty$ и также имеющая в каждой точке τ производные любого порядка.

Далее так как из (34) вытекает, что $g(0) = 0$, то и $\varphi(0) = 0$, и поэтому функция $y = \varphi(\tau)$ отрицательна при $\tau < 0$ и положительна при $\tau > 0$.

Фиксируем достаточно малое положительное число a (выбор его будет уточнен ниже) и положим $b = \varphi(-a)$, $c = \varphi(a)$, так что $a = g(c) = -g(b)$. Тогда b и c удовлетворяют условиям $-1 < b < 0$, $c > 0$.

Разобьем интеграл, стоящий в правой части (35), на сумму трех интегралов:

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-xg^2(y)} dy = \int_{-1}^{b} e^{-xg^2(y)} dy + \int_{b}^{c} e^{-xg^2(y)} dy + \int_{c}^{+\infty} e^{-xg^2(y)} dy. \qquad (37)$$

Из того, что функция $g^2(y)$ убывает при $-1 < y < 0$ и возрастает при $y > 0$, и из равенства $g^2(b) = g^2(c) = a^2$ вытекает, что первый и третий интегралы в правой части (37) имеют при больших x порядок e^{-xa^2}. Символически это записывают как

$$\int_{-1}^{b} e^{-xg^2(y)} dy = O(e^{-xa^2}), \qquad \int_{c}^{+\infty} e^{-xg^2(y)} dy = O(e^{-xa^2}),$$

понимая под символом $O(e^{-xa^2})$, что для этой величины существует постоянная C (быть может, зависящая от a), такая, что $\left|O(e^{-xa^2})\right| \le Ce^{-xa^2}$.

Итак, равенство (37) можно переписать в виде

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-xg^2(y)} dy = \int_{b}^{c} e^{-xg^2(y)} dy + O(e^{-xa^2}). \qquad (38)$$

Сделаем теперь в интеграле, стоящем в правой части (38), замену переменной интегрирования y на новую переменную τ с помощью равенства $y = \varphi(\tau)$, где $y = \varphi(\tau)$ – функция, обратная к функции $\tau = g(y)$. Так как при этом $dy = \varphi'(\tau)d\tau$, $g(b) = -a$, $g(c) = a$, то мы получим, что

$$\int_{b}^{c} e^{-xg^2(y)} dy = \int_{-a}^{a} e^{-x\tau^2} \varphi'(\tau) d\tau. \qquad (39)$$

Из равенств (35), (38) и (39) получим, что

$$\Gamma(x+1) = \frac{x^{x+1}}{e^x}\int_{-a}^{a} e^{-x\tau^2}\varphi'(\tau)d\tau + O(e^{-xa^2}). \qquad (40)$$

Напомним, что функция $\varphi(\tau)$ имеет на всей бесконечной прямой (и, в частности, в окрестности точки $\tau = 0$) производные любого порядка.

Отсюда следует, что, какой бы номер n мы ни фиксировали, для функции $\varphi'(\tau)$ для всех достаточно малых по модулю τ справедливо представление

$$\varphi'(\tau) = \varphi'(0) + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{1!}\tau + \frac{\varphi^{(3)}(0)}{2!}\tau^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\varphi^{(2n)}(0)}{(2n-1)!}\tau^{2n-1} + O(\tau^{2n}), \qquad (41)$$

где $O(\tau^{2n})$ обозначает величину порядка τ^{2n}.

Формулу (41) называют в анализе формулой Маклорена. Мы установим эту формулу, для простоты завысив требования, достаточные для ее справедливости.

Так как у функции $\varphi(\tau)$ в точке $\tau = 0$ существует производная $\varphi^{(2n+1)}(0)$, то, по определению, существует предел

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\varphi^{(2n)}(\tau) - \varphi^{(2n)}(0)}{\tau} = \varphi^{(2n+1)}(0).$$

Это означает, что функция аргумента τ

$$\alpha(\tau) = \frac{\varphi^{(2n)}(\tau) - \varphi^{(2n)}(0)}{\tau} - \varphi^{(2n+1)}(0)$$

является бесконечно малой при $\tau \longrightarrow 0$, то есть справедливо равенство

$$\varphi^{(2n)}(\tau) = \varphi^{(2n)}(0) + \varphi^{(2n+1)}(0)\tau + \tau\alpha(\tau). \qquad (42)$$

В этом равенстве два последних слагаемых представляют собой величину $O(\tau)$ порядка τ, так что (42) можно переписать в виде

$$\varphi^{(2n)}(\tau) = \varphi^{(2n)}(0) + O(\tau). \qquad (43)$$

Формула (41) получается из равенства (43) посредством $(2n-1)$-кратного интегрирования равенства (43) по переменной τ в пределах от нуля до достаточно малого $t = \tau$. Так, интегрируя (43) один раз по τ в пределах от нуля до достаточно малого t, получим равенство

$$\varphi^{(2n-1)}(t) = \varphi^{(2n-1)}(0) + \varphi^{(2n)}(0)t + O(t^2).$$

Заменяя в последнем равенстве t на τ и снова проводя интегрирование по τ в пределах от нуля до t, получим

$$\varphi^{(2n-2)}(t) = \varphi^{(2n-2)}(0) + \varphi^{(2n-1)}(0)\frac{t}{1!} + \varphi^{(2n)}(0)\frac{t^2}{2!} + O(t^3).$$

Производя указанную процедуру $2n-1$ раз, мы и выведем формулу (41), справедливую для всех достаточно малых по модулю τ.

Используя символ суммирования $\sum$, можно записать формулу (41) более компактно:

$$\varphi'(\tau) = \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!}\tau^k + O(\tau^{2n}). \qquad (41')$$

Будем теперь считать, что фиксированное нами выше положительное число a выбрано настолько малым, что всюду на интервале $(-a, a)$ справедлива формула (41').

Вставляя (41') в правую часть (40), получим

$$\Gamma(x+1) = \frac{x^{x+1}}{e^x}\left[\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!}\int_{-a}^{a}\tau^k e^{-x\tau^2}d\tau + \right.$$

$$\left. + O(1)\int_{-a}^{a}\tau^{2n}e^{-x\tau^2}d\tau\right] + O(e^{-xa^2}). \qquad (44)$$

Заметим, что интеграл в симметрических пределах от $-a$ до a от нечетной функции равен нулю, а от четной функции – двум интегралам в пределах от нуля до a. Поэтому в правой части (44) отличны от нуля будут только слагаемые с четным k и, положив $2k = m$, можно переписать (44) в виде

$$\Gamma(x+1) = \frac{x^{x+1}}{e^x}\left[\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(2m+1)}(0)}{(2m)!}\cdot 2\int_{0}^{a}\tau^{2m}e^{-x\tau^2}d\tau + \right.$$

$$\left. + O(1)\int_{0}^{a}\tau^{2n}e^{-x\tau^2}d\tau\right] + O(e^{-xa^2}). \qquad (45)$$

Убедимся теперь в том, что для каждого $m = 1, 2, \ldots$ справедливо равенство

$$2\int_{0}^{a}\tau^{2m}e^{-x\tau^2}d\tau = \frac{\Gamma(m+1/2)}{x^{m+1/2}} + O(e^{-xa^2}). \qquad (46)$$

Действительно, представляя интеграл $\int_0^a$ в виде разности интегралов $\int_0^{+\infty} - \int_a^{+\infty}$ и замечая, что первый из этих интегралов после замены переменной интегрирования τ на новую переменную t, определяемую равенством $t = x\tau^2$, будет

$$\int_{0}^{+\infty}\tau^{2m}e^{-x\tau^2}d\tau = \frac{1}{2x^{m+1/2}}\int_{0}^{+\infty}t^{m-1/2}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(m+1/2)}{x^{m+1/2}},$$

а второй из указанных интегралов при всех $x \ge 1$ удовлетворяет условию

$$\int_a^{+\infty} \tau^{2m} e^{-x\tau^2} d\tau \le e^{-(x-1)a^2} \int_a^{+\infty} \tau^{2m} e^{-\tau^2} d\tau \le Ce^{-xa^2} = O(e^{-xa^2}),$$

мы и получим соотношение (46).

Вставляя (46) в (45) и учитывая, что для любого номера n величина $O(e^{-xa^2})$ тем более является величиной $O\left(\frac{1}{x^{n+1/2}}\right)$ (в силу существования при любых $\alpha > 0$ и $a > 1$ равного нулю предела (28)), получим, что для любого номера n

$$\Gamma(x+1) =$$

$$= \frac{x^{x+1}}{e^x}\left[\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2m+1)}(0)\Gamma(m+1/2)}{(2m)!x^{m+1/2}} + O\left(\frac{1}{x^{n+1/2}}\right)\right]. \quad (47)$$

Равенство (47) и дает искомое асимптотическое разложение для отношения $\frac{\Gamma(x+1)}{x^x}$. При этом следует отметить, что все входящие в (47) значения $\Gamma(m + 1/2)$ и $\varphi^{(2m+1)}(0)$ последовательно вычисляются. При $m = 0$ значение $\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt$ заменой $u = \sqrt{t}$ приводится к известному интегралу Пуассона $2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$. Все последующие значения $\Gamma(m + 1/2)$, отвечающие $m = 1, 2, \ldots$, вычисляются с помощью $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ и формулы $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

Для последовательного вычисления значений $\varphi'(0)$, $\varphi^{(2)}(0)$, $\varphi^{(3)}(0)$, ... может быть использовано равенство (36). Действительно, учитывая, что функция $y = \varphi(\tau)$ является обратной по отношению к функции $\tau = g(y)$ и что $\frac{d}{dy}[g^2(y)] = 2g(y)g'(y) = 2\frac{g(y)}{\varphi'(\tau)}$, придадим равенству (36) вид

$$\frac{2\tau}{\varphi'(\tau)} = \frac{\varphi(\tau)}{1 + \varphi(\tau)},$$

эквивалентный равенству

$$\varphi(\tau)\varphi'(\tau) = 2\tau + 2\tau\varphi(\tau). \quad (48)$$

Последовательно дифференцируя равенство (48) и полагая после каждого дифференцирования $\tau = 0$, по очереди вычислим все производные функции $\varphi(\tau)$ в точке $\tau = 0$. Так, дифференцируя (48) один раз, получим

$$[\varphi'(\tau)]^2 + \varphi(\tau)\varphi''(\tau) = 2 + 2\varphi(\tau) + 2\tau\varphi'(\tau). \quad (49)$$

Полагая в этом равенстве $\tau = 0$ и учитывая, что $\varphi(0) = 0$, получим из него, что $[\varphi'(0)]^2 = 2$, то есть $\varphi'(0) = \sqrt{2}$.

Дифференцируя далее (49), найдем

$$2\varphi'(\tau)\varphi''(\tau) + \varphi''(\tau)\varphi'(\tau) + \varphi(\tau)\varphi^{(3)}(\tau) =$$
$$= 2\varphi'(\tau) + 2\varphi'(\tau) + 2\tau\varphi''(\tau).$$

Полагая в последнем равенстве $\tau = 0$ и учитывая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \sqrt{2}$, получим, что $3\sqrt{2}\varphi''(0) = 4\sqrt{2}$, откуда $\varphi''(0) = 4/3$.

Продолжая эти рассуждения далее, последовательно получим, что $\varphi^{(3)}(0) = \sqrt{2}/3$, $\varphi^{(4)}(0) = -16/45$, $\varphi^{(5)}(0) = \sqrt{2}/9$, ...

В заключение запишем равенство (47) для случая, когда x равно целому числу n, то есть $\Gamma(n + 1) = n!$, выписав в нем пять первых членов асимптотического разложения:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left\{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{288}\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{139}{51\,840}\left(\frac{1}{n}\right)^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{571}{2\,488\,320}\left(\frac{1}{n}\right)^4 + O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^5\right]\right\}.$$

В качестве литературы по этой теме рекомендуем [1, гл. 3; 2, гл. 9, § 5] и для более углубленного изучения монографии [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. 5-е изд. М.: Физматлит, 1998. Т. 1. 616 с.

2. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. 3-е изд. М.: Физматлит, 1998. Т. 2. 448 с.

3. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.

4. *Олвер Ф.* Асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 376 с.

Рецензент статьи А.П. Маркеев

* * *

Владимир Александрович Ильин, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ, главный научный сотрудник Математического института им. В.А. Стеклова РАН, действительный член РАН. Лауреат Государственной премии СССР. Автор более 230 научных публикаций по теории функций, теории дифференциальных уравнений и математической физике, университетских учебников по математическому анализу, аналитической геометрии и линейной алгебре и монографии по спектральной теории дифференциальных операторов.