ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА И ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

С. А. ГОМОНОВ

Смоленский государственный педагогический университет

THE CLUSTER SETS AND ISOLATED SINGULAR POINTS OF POLYANALYTIC FUNCTIONS

S. A. GOMONOV

The methods which enable us to estimate and study the behavior of single complex variable functions close to their isolated singular points are examined. A natural classification of isolated points of functions of some classes (the so-called polyanalytic functions) is proposed.

Изложены способы, позволяющие охарактеризовать и изучить поведение функций комплексного переменного вблизи точек, не являющихся их точками непрерывности. Для функций некоторых классов (для так называемых полианалитических функций) приводится естественная классификация их изолированных особых точек.

ВВЕДЕНИЕ, ИЛИ НЕМНОГО ФИЛОСОФИИ

Для начала стоит вспомнить о привычках и традициях (в том числе и математических), которые, как известно, бывают хорошими и ... разными, причем те из них, что еще вчера казались нам опорой и верными помощниками, сегодня безжалостно переводятся нами же в разряд разных. Так, например, для перекормленного так называемыми элементарными функциями школьника-старшеклассника отсутствие непрерывности или дифференцируемости у функции в некоторой точке представляется фактом весьма экзотическим, даже нарушающим привычную гармонию, хотя в действительности непрерывность, а тем более дифференцируемость (особенно для функций комплексного переменного) –

[1] **ПРИМЕЧАНИЕ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА ЖУРНАЛА**

Мне представляется правильным в очередной раз рассказать читателям, как работает наш редакционный совет, тем более, что следующие ниже материалы говорят сами за себя. Итак, каждую приходящую в журнал статью направляют на отзыв внешнему рецензенту (как правило, Соросовскому лауреату). В зависимости от его заключения возможны три исхода: статья без замечаний (и без требования к автору исправить что-либо в тексте) поступает в редакционный совет на просмотр; статью отправляют автору на исправление; статью отправляют второму рецензенту и после этого передают в редакционный совет (он решает, отклонить статью окончательно или вернуть автору на исправление). Если статья одобрена экспертным советом, то она поступает на заключение главному редактору (как правило, до трети статей после этого возвращаются в редакционный совет или автору для внесения уточнений, исправлений или дополнений).

Этот механизм хорошо иллюстрирует статья доцента Смоленского пединститута С.А. Гомонова, известного математика, члена Американского математического общества. Читатель может убедиться на примере публикуемых рецензий, как на деле происходит взаимодействие рецензентов (в нашем журнале с первых дней его работы принято, что рецензенты раскрывают свои фамилии авторам статей, а не прячутся за ширмой анонимности).

В.Н. Сойфер

Отзывы рецензентов, решение экспертного совета и главного редактора см. после текста статьи.

свойство весьма уникальное. Однако уже для вчерашнего школьника, а ныне студента математической специальности отсутствие у функции этих свойств – явление совершено привычное, можно сказать рядовое. Для аспиранта же, многие месяцы шагающего к диссертации "плечом к плечу" с классом весьма экзотических функций, наличие даже непрерывности покажется неслыханной роскошью, почти божественным даром. Но самое замечательное, что всегда и всюду, где прежний инструмент исследования становился бесполезным, человек благодаря своей настойчивости и изобретательности создавал другой, более совершенный.

Именно так произошло со свойством непрерывности функции в точке, а если поточнее, то с отсутствием этого свойства.

В 1895 году французский математик Поль Пенлеве (1863–1933) ввел понятие "область неопределенности" (современное название – предельное множество функции в точке) и ... оказался основателем теории предельных множеств. С тех пор прошло более ста лет, и хотя в 1995 году никаких юбилейных торжеств не отмечалось, но то, что понятие "предельное множество" живет и побеждает век спустя в самых разных областях математики – от исследования граничных свойств функций комплексного переменного до изучения многозначных отображений топологических пространств, является лучшим памятником талантливому французскому математику.

НУЖДА ЗАСТАВИТ И КАЛАЧИ ЕСТЬ, ИЛИ НЕ БЫЛО БЫ СЧАСТЬЯ, ДА НЕСЧАСТЬЕ ПОМОГЛО

В середине XVI века рухнул казавшийся неприступным тысячелетний бастион – люди научились решать кубические уравнения общего вида. Факт открытия метода решения и его дальнейшее совершенствование связывают с именами двух математиков: Никколо Тартальи (1499?–1557) и Джироламо Кардано (1501–1576), взаимоотношения между которыми могли бы лечь в основу непревзойденного авантюрного романа-триллера со многими действующими лицами [1]. Однако попытки получить с помощью соответствующего правила (формулы Кардано–Тартальи) корни (заведомо существующие) некоторых кубических уравнений оказались обреченными на провал, так как приводили к совершенно безнадежной невозможной операции – извлечению квадратного корня из отрицательного числа. Возникла, таким образом, чисто вычислительная потребность научится обращаться (складывать, вычитать, умножать и т.д.) с возникающими таким образом странными объектами, которые и числами поначалу называть не хотелось. Сам Кардано упомянул в 1545 году в своих работах "мнимые" числа, выбрав для возникшего математического безобразия весьма мягкое и осторожное название. Но вычислительные потребности заставили смириться с расширением запаса действительных чисел **R** до так называемых комплексных чисел **C**, то есть формальных выражений вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, тем более что для этих ненастоящих чисел впоследствии нашлось очень много настоящей работы в гидродинамике, картографии, а уже в наше время и в космических расчетах.

Договоримся теперь два символа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ полагать равными тогда и только тогда, когда одновременно $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, а кроме того, считать символ $z = x + iy$ при $y = 0$ совпадающим с действительным числом x, тем самым обеспечив включение $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Складывать, вычитать и умножать комплексные числа будем по следующим правилам: если $z_1 = x_1 + iy_1$, а $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Комплексные числа допускают (чем и ценны) различные истолкования: точечное, векторное, операторное. В частности, можно договориться число $z = x + iy$ изображать точкой $A(x; y)$ декартовой плоскости. При этом неотрицательное число $\sqrt{x^2 + y^2}$, то есть расстояние от точки $A(x; y)$ до начала координат $O(0; 0)$, обозначается символом $|z| = |x + iy|$ и называется модулем комплексного числа z. Отсюда геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$: $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ – это расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ декартовой координатной плоскости.

Нелишним будет также ввести еще одну операцию – операцию сопряжения: каждому числу $z = x + iy$ поставим в соответствие число $x - iy$, называемое сопряженным к z и обозначаемое символом $\bar{z}$. Операция сопряжения обладает следующими свойствами:

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,$$
$$z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n,$$

где n – любое натуральное число, и, наконец, $z = \bar{z}$ тогда и только тогда, когда z – действительное число.

СХОДИТЬСЯ ИЛИ НЕТ И К ЧЕМУ

Понятие "расстояние" между комплексными числами, точнее, между их изображениями на координатной плоскости позволяет естественным образом ввести понятие сходящейся (приближающейся) к некоторому комплексному числу z_0 последовательности (z_n).

А именно: говорят, что последовательность (z_n) сходится к числу z_0 (имеет своим пределом точку z_0), если для круга любого радиуса с центром в точке z_0 найдется такой номер n', что все члены последовательности (z_n) с номерами, большими, чем n', то есть $z_{n'+1}, z_{n'+2}, z_{n'+3}, \ldots$, лежат в этом круге, называемом окрестностью точки z_0. Про такую последовательность (z_n) еще говорят, что ее предел существует и равен z_0, что и записывается кратко следующим образом: $\lim z_n = z_0$. Например,

$$\lim \frac{i}{n} = 0, \qquad \lim \frac{-n^3 + i \cdot n^2}{n^3 - 2i} = -1,$$

а вот пределы последовательностей (ni) и $((-1)^n \cdot (i+2))$ не существуют.

Стоит отметить, что школьные теоремы о пределах последовательностей действительных чисел сохраняются и для последовательностей комплексных чисел, в частности, если $\lim z_n = A$, а $\lim \tilde{z}_n = B$, то

$$\lim(z_n \pm \tilde{z}_n) = A \pm B, \ \lim(z_n \cdot \tilde{z}_n) = A \cdot B, \ \lim z_n^k = A^k, \quad (1)$$

где k – любое натуральное число, ну а если $B \neq 0$, то и

$$\lim \frac{z_n}{\tilde{z}_n} = \frac{A}{B}.$$

Следует отметить, что два первых свойства легко с помощью метода математической индукции переносятся на любое конечное число последовательностей.

Среди последовательностей, не имеющих предела, выделяют "последовательности, сходящиеся к бесконечности". А именно: последовательность (z_n) называют сходящейся к ∞, если последовательность $\left(\frac{1}{z_n}\right)$ сходится к нулю. Указанное свойство последовательности (z_n) кратко записывают так: $\lim z_n = \infty$.

Легко видеть, что произведение любой последовательности, сходящейся к ∞, и последовательности, сходящейся к ненулевому пределу, есть последовательность, сходящаяся к ∞.

Любопытно, что абстрактный символ ∞ настолько естественно дополняет совокупность всех комплексных чисел **C**, что именно так с ним и поступают – добавляют его к **C**, а то, что получается, именуют расширенной комплексной плоскостью и обозначают символом $\overline{\mathbf{C}}$, при этом под окрестностью точки ∞ договариваются понимать внешность любого круга плоскости **C**.

Вот теперь можно показать, что любая последовательность комплексных чисел имеет по крайней мере одну подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из $\overline{\mathbf{C}}$.

ЧТО ЕСТЬ, КОГДА НЕТ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Школьное понятие "непрерывность функции в точке" без труда переносится и на функции комплексного переменного z, а именно: говорят, что функция $f(z)$, заданная в некоторой окрестности точки z_0, непрерывна в этой точке, если для любой последовательности (z_n), сходящейся к z_0, последовательность $(f(z_n))$ сходится к $f(z_0)$, то есть если $\lim z_n = z_0$, то $\lim f(z_n) = f(z_0)$.

Иначе говоря, по какой последовательности (z_n) аргумент z ни приближается к z_0, последовательность значений функции $f(z)$ будет приближаться к одному и тому же числу $f(z_0)$ – значению функции $f(z)$ в точке z_0.

Непосредственно из свойств (1) вытекает, что сумма, разность и произведение функций, непрерывных в некоторой точке z_0, являются также непрерывными функциями в этой же точке. Простейшими примерами непрерывных в каждой точке плоскости **C** функций являются следующие.

Пример 1. Любой полином (многочлен) от z, то есть функция вида

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m, \quad (2)$$

где m – натуральное число или нуль, а $a_0, a_1, \ldots, a_m$ – фиксированные комплексные числа (коэффициенты многочлена $p(z)$), непрерывна в каждой точке из **C**.

Пример 2. Функция $f(z) = \bar{z}$ непрерывна в каждой точке из **C**.

Пример 3. Любой полином от z и $\bar{z}$, то есть функция вида

$$p(z, \bar{z}) = p_0(z) + p_1(z)\bar{z} + p_2(z)\bar{z}^2 + \ldots + p_m(z)\bar{z}^m, \quad (3)$$

где m – натуральное число или нуль, а $p_0(z), p_1(z), p_2(z), \ldots$ $\ldots, p_m(z)$ – обычные многочлены от z вида (2), непрерывна в каждой точке из **C**.

Всякую функцию вида (3) называют полианалитическим полиномом (п.а. полиномом), а для краткости – просто ПАПом.

Рассмотрим теперь функцию $f(z)$, заданную в некоторой окрестности точки z_0 из $\overline{\mathbf{C}}$. Совершенно очевидно, что требование, чтобы для любой (!) последовательности (z_n), сходящейся к z_0, последовательность $(f(z_n))$ была сходящейся к одному и тому же элементу $f(z_0)$, – весьма жесткое требование. Скорее будет так: для одной последовательности $(z_n^{(1)})$, сходящейся к z_0, последовательность $(f(z_n^{(1)}))$ будет сходиться к элементу A из $\overline{\mathbf{C}}$; для другой последовательности $(z_n^{(2)})$, сходящейся к z_0, последовательность $(f(z_n^{(2)}))$ будет сходиться к элементу B из $\overline{\mathbf{C}}$, а для третьей последовательности $(z_n^{(3)})$, сходящейся к z_0, последовательность $(f(z_n^{(3)}))$ не будет сходящейся и т.д ...

Так возникающие точки A, B, ... расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ называют предельными значениями функции $f(z)$ в точке z_0, а совокупность всех предельных значений функции $f(z)$ в точке z_0 – предельным множеством функции $f(z)$ в точке z_0. Обозначают эту совокупность точек из $\overline{\mathbf{C}}$ символом

$$C(f(z), z_0).$$

Очевидно, что непрерывность функции $f(z)$ в точке z_0 означает, что $C(f(z), z_0)$ состоит из одной точки $f(z_0)$, в частности, для любого ПАПа $p(z, \bar{z})$ из примера 3 и любой точки z_0 из $\mathbf{C}$ предельное множество $C(p(z, \bar{z}), z_0)$ исчерпывается одной точкой $p(z_0, \bar{z}_0)$. Однако в $\overline{\mathbf{C}}$ осталась еще точка ∞, а вместе с ней и вопрос: что будет со значениями ПАПа, если аргумент z "скачет" к ней по некоторой последовательности, то есть, образно говоря, когда аргумент уходит "к горизонту".

Итак, пусть некоторая функция и не обладает непрерывностью в какой-либо точке, но ведь предельное-то множество в этой точке у нее есть, а значит, естествен вопрос о его устройстве: что за фигуру расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ образует оно своими элементами, как они расположены в $\overline{\mathbf{C}}$?

ПАПЫ И ИХ ПОВЕДЕНИЕ "ЗА ГОРИЗОНТОМ"

Для обычного многочлена вида (2) найти его $C(p(z), \infty)$ никакого труда не составляет. Если $p(z)$ нетождествен константе, то $C(p(z), \infty)$ состоит из одной точки ∞. Однако, как только в выражение, задающее многочлен, наряду с z войдет и символ $\bar{z}$, так ситуация усложнится и тем станет интереснее.

Прежде всего следует отметить, что предельные множества ПАПов в точке ∞ оказались органически связаны с так называемыми полиномиальными линиями, которые можно определить следующим образом.

Определение 1. *Полиномиальной линией* будем называть совокупность всех точек плоскости $\mathbf{C}$, изображающих все значения некоторого многочлена $l(t)$ с комплексными коэффициентами от аргумента t, пробегающего все действительные числа $\mathbf{R}$.

Ради удобства договоримся в дальнейшем полиномиальные линии всегда считать не вырожденными до одной точки (то есть многочлен $l(t)$ всегда будем считать нетождественным константе) и, как правило, пополненными точкой ∞, при этом будем писать $t \in \overline{\mathbf{R}}$, а не $t \in \mathbf{R}$.

Примерами полиномиальных линий являются любая прямая, любой луч и любая парабола, а вот гипербола полиномиальной линией не является. Устройство же предельного множества в точке ∞ любого ПАПа полностью характеризуется следующей теоремой из [3].

Теорема 1. *Предельное множество в точке ∞ любого нетождественного константе полианалитического полинома либо состоит из одной точки ∞, либо представляет собой объединение конечного числа невырожденных полиномиальных линий.*

Обратно, *для каждой фигуры Φ, $\Phi \subset \overline{\mathbf{C}}$, которая представляет собой объединение конечного числа невырожденных полиномиальных линий либо лишь точку ∞, существует такой полианалитический полином $p(z, \bar{z})$, что $C(p(z, \bar{z}), \infty) = \Phi$.*

Как иллюстрирующие теорему 1 приведем следующие утверждения:

1) предельное множество в точке ∞ любого нетождественного константе ПАПа вида $p(z, \bar{z}) = p_0(z) + p_1(z)\bar{z}$ (такой ПАП называют бианалитическим полиномом) состоит [2] или из одной точки ∞, или является прямой плоскости $\overline{\mathbf{C}}$, в частности

$$C(az + b\bar{z} + c, \infty) = \\ = \begin{cases} \{\infty\}, \text{ если } |a| \neq |b|, \\ \{\sqrt{ab} \cdot t + c \mid t \in \overline{\mathbf{R}}\}, \text{ если } |a| = |b| \neq 0; \end{cases}$$

2) предельное множество в точке ∞ любого нетождественного константе ПАПа вида $p(z, \bar{z}) = p_0(z) + p_1(z)\bar{z} + p_2(z)\bar{z}^2$ (такой ПАП называют трианалитическим полиномом) состоит или из одной точки ∞, или является прямой, или объединением двух прямых, или лучом, или параболой плоскости $\overline{\mathbf{C}}$. Причем любая из перечисленных фигур является предельным множеством в точке ∞ некоторого трианалитического полинома [3]. В частности, $C(z \cdot \bar{z}^2, \infty) = \{\infty\}$; $C(\bar{z}^2 - z^2, \infty) = \{t \cdot i \mid t \in \overline{\mathbf{R}}\}$ – прямая; если $p(z, \bar{z}) = z \cdot (z + \bar{z})(cz + \bar{z})$, где $|c| = 1$, но $c \neq 1$, то

$$C(p(z, \bar{z}), \infty) = \{(c-1)t \mid t \in \overline{\mathbf{R}}\} \cup \{\sqrt{\bar{c}} \cdot (c-1)t \mid t \in \overline{\mathbf{R}}\}$$

есть объединение пары пересекающихся прямых. Если

$$p(z, \bar{z}) = z^3\bar{z}^2 + 2z(z^3 + \alpha)\bar{z} + z^5 + 2\alpha z^2 + \frac{1}{4}z,$$

где $\alpha \in \mathbf{C}$, то

$$C(p(z, \bar{z}), \infty) = \{2it + 2i\alpha \mid t \in \overline{\mathbf{R}}\} \cup \{-2it - 2i\alpha \mid t \in \overline{\mathbf{R}}\}$$

есть объединение пары параллельных прямых, наконец $C((\bar{z} + z)^2, \infty) = \{t^2 \mid t \in \overline{\mathbf{R}}\}$ – луч, а $C((\bar{z} + z + i)^2 + 1, \infty) = \{t^2 + 2ti \mid t \in \overline{\mathbf{R}}\}$ – парабола.

АФ, ПАФ И "ВЕЛИКОЛЕПНАЯ" ПЯТЕРКА, ИЛИ ТРИ ПЛЮС ДВА

Про функцию $f(z)$, заданную в некоторой окрестности произвольной точки a из $\overline{\mathbf{C}}$, а в самой точке a нет, говорят, что она определена в проколотой окрестности точки a, саму же точку a называют изолированной особой точкой функции $f(z)$ или, короче, изолированной особенностью.

Функцию $f(z)$, заданную в некоторой окрестности точки z_0 из $\mathbf{C}$, называют дифференцируемой в этой точке, если предельное множество $C\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, z_0\right)$ состоит из одного конечного комплексного числа, которое называют значением производной функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначают $f'(z_0)$.

Определение 2. Функцию, дифференцируемую в каждой точке некоторой окрестности точки z_0, называют *аналитической* или *голоморфной функцией* в этой точке z_0.

Понятие аналитической функции (АФ) является важнейшим во всем комплексном анализе. Приведенное выше определение аналитической функции восходит к Г. Риману (1826–1866) и является лишь одним из возможных (есть и другие, внешне весьма непохожие друг на друга).

Функция, аналитическая в точке z_0, очевидно, непрерывна в ней, но вот ситуация, когда некоторая функция задана и аналитична в каждой точке некоторой проколотой окрестности точки z_0, не столь проста и очевидна. Имеет место замечательный результат, основанный на теореме Сохоцкого–Казорати–Вейерштрасса [4], позволяющей исходя из поведения значений функции вблизи изолированной особенности выделить ровно три типа таких точек. Вот эта теорема, создающая возможность предложить естественную классификацию изолированных особых точек аналитических функций.

Теорема 2. *Предельное множество произвольной аналитической функции в любой ее изолированной особенности или состоит из одной точки* (*конечной или бесконечной*), *или является тотальным, то есть совпадает с* $\overline{\mathbf{C}}$.

Нетрудно привести примеры всех трех типов изолированных особенностей, именуемых соответственно устранимой особенностью, полюсом и существенной особенностью: точка 0 – устранимая особенность функции $f(z)=\frac{\sin z}{z}$, так как $C\left(\frac{\sin z}{z}, 0\right)=\{1\}$, точка ∞ – устранимая особенность функции $f(z)=\frac{2z^2+1}{z^2-1}$, так как $C\left(\frac{2z^2+1}{z^2-1}, \infty\right)=\{2\}$, точка 1 – полюс функции $f(z)=\frac{z^2+1}{z-1}$, так как $C\left(\frac{z^2+1}{z-1}, 1\right)=\{\infty\}$, и, наконец, ∞ – существенная особенность функции $f(z)=\sin z$, так как $C(\sin z, \infty)=\overline{\mathbf{C}}$, правда, обоснование последнего равенства требует весьма глубокого изучения свойств аналитических функций, например знакомства с замечательной большой теоремой Пикара (см. [4]).

Так же как для обычного (аналитического) полинома (2) как его естественное обобщение возник полианалитический полином (3), так и для произвольной аналитической функции возникает естественное ее обобщение (правда, одно из многих), если в равенстве (3) заменить полиномы $p_j(z)$, $j=0, 1, \ldots, m$, на произвольные функции $f_j(z)$, аналитические в каждой точке проколотой окрестности некоторого элемента a из $\overline{\mathbf{C}}$. В результате получим так называемую полианалитическую функцию (п.а. функцию, ПАФ), заданную в некоторой проколотой окрестности точки a. Функции $f_j(z)$, $j= 0, 1, \ldots, m$, при этом называют аналитическими компонентами построенной п.а. функции. Следующая теорема раскрывает структуру предельного множества произвольной п.а. функции в ее изолированной особой точке.

Теорема 3. *Предельное множество в точке* $a\in\overline{\mathbf{C}}$ *произвольной полианалитической функции* $F(z)=f_0(z)+ f_1(z)\bar{z}+f_2(z)\bar{z}^2+\ldots+f_m(z)\bar{z}^m$, *заданной в некоторой проколотой окрестности точки* a, *или состоит из одной точки, или является объединением конечного числа невырожденных полиномиальных линий, или представляет собой образ окружности* $\{z: |z|=1\}$ *при отображении, заданном некоторым отличным от тождественной константы полиномом одного переменного* z, *или является тотальным* (*то есть совпадает с* $\overline{\mathbf{C}}$).

Обратно, *для любой точки* $a\in\overline{\mathbf{C}}$ *и любого множества* Φ, $\Phi\subset\overline{\mathbf{C}}$, *являющегося либо объединением конечного числа невырожденных полиномиальных линий, либо образом окружности* $\{z: |z|=1\}$ *при отображении, заданном некоторым отличным от тождественной константы полиномом одного переменного* z, *существует полианалитическая функция* $F(z)$ *с аналитическими компонентами – рациональными функциями от* z, *для которой* $C(F(z), a)=\Phi$.

Зная "устройство" предельного множества в изолированных особых точках п.а. функций, можно предложить опять-таки естественную классификацию этих точек, положив в ее основу (так же как это было сделано для аналитических функций) вид предельного множества функции в ее изолированной особенности.

Таким образом, ранее известные для аналитических функций три типа изолированных особенностей:

1) существенная особенность – предельное множество тотально, то есть совпадает с $\overline{\mathbf{C}}$;

2) устранимая (по непрерывности) особенность – предельное множество состоит из одной конечной точки плоскости $\overline{\mathbf{C}}$;

3) полюс – предельное множество состоит из одной точки ∞,

дополняются еще двумя:

4) л-точка – предельное множество – объединение конечного числа невырожденных полиномиальных линий и

5) о-точка – предельное множество – образ окружности при отображении, заданном некоторым отличным от тождественной константы полиномом одного переменного z.

Критерий появления точки каждого из указанных типов изложен в работе [3].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ, ИЛИ "ПОГРАНИЧНИКИ" ВСЕХ СТРАН, СОЕДИНЯЙТЕСЬ!

Изучение особых точек функции комплексного переменного средствами теории предельных множеств относится к важному направлению комплексного анализа – теории граничных свойств аналитических функций и функций более общего вида, чем аналитические. Причем, чтобы оправдать уход математиков от аналитических функций к некоторым их обобщениям, в частности к полианалитическим и связанным с ними полигармоническим функциям, достаточно сослаться на их неформальную применимость в математической физике, в частности в теории упругости.

Однако и новые результаты, и новые приложения – все это появилось благодаря тому, что в разработке теории граничных свойств функций комплексного переменного принимали участие такие выдающиеся математики, как Э. Пикар, Е. Линделёф, Н.Н. Лузин, П. Фату, Ф. и М. Риссы, А.И. Плеснер, Э. Коллингвуд и др. Так что многие задачи теории граничных свойств, и в частности теории предельных множеств, уже решены, но еще большее их число ждет своего часа. Пока, например, неясно, как устроено предельное множество (в произвольной точке множества $\overline{\mathbf{C}}$) отношения двух полианалитических полиномов, и тем более не решен вопрос для частного двух произвольных полианалитических функций. Не решен вопрос и о классификации неизолированных особенностей этих функций.

В заключение стоит отметить, что развитие теории граничных свойств все чаще осуществляется с привлечением других областей математики: общей топологии, общей алгебры, алгебраической геометрии, тем более что нерешенных проблем, требующих свежих идей и новых подходов, хватит на многие годы упорного труда и объединенных усилий всех специалистов, разрабатывающих "пограничные" вопросы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутер Р.С., Полунов Ю.Л.* Джироламо Кардано. М.: Знание, 1980. 192 с.
2. *Балк М.Б.* Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М., 1991. Т. 85. С. 187–254.
3. *Гомонов С.А.* О структуре предельных множеств полианалитических функций в изолированных особых точках // Mathematica Montisnigri(5). Подгорица, 1995. С. 27–64.
4. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций: В 2 т. М.: Наука, 1967. Т. 1. 488 с.

Рецензенты статьи
А.Я. Хелемский, Ю.Г. Мартыненко

* * *

Сергей Анатольевич Гомонов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии Смоленского государственного педагогического университета, член Американского математического общества. Область научных интересов – многозначные отображения топологических пространств, граничные свойства функций одного комплексного переменного. Автор 30 научных и научно-методических статей и пособий.

О работе С.А. Гомонова "Предельные множества и изолированные особенности полианалитических функций" (1-й отзыв)

Старшеклассник Петя проявляет несомненные способности к математике, и это отчетливо видит его учитель. Если советовать Пете посвятить математике всю свою дальнейшую жизнь, то как ему объяснить, чем он, в сущности, будет заниматься? Может быть, чем-то вроде решения олимпиадных задач повышенного типа, то есть по существу той же элементарной математикой, только "количественно" усложненной? Или, может быть, постоянным обслуживанием естественных или экономических наук, решая те же задачи о бассейнах с трубами А и Б, только теперь труб будет гораздо больше?

К сожалению, многие учителя думают именно так, и воспитанные ими школьники сохраняют подобное представление о математике до конца своих дней. (В результате у нас и особенно, как я слыхал, в США, сказать в разговоре "Ах, Вы математик? С детства ненавижу математику!" считается чуть ли не признаком хорошего тона и возвышенной души). И часто случается, что настоящий, прирожденный Математик душевного склада, скажем, Римана или Гротендика решает к концу школы не связывать свою жизнь с этой наукой, считая, что она слишком суха, технична и "приземлена", и не подозревая о том, как много в ней философии и, я бы сказал, настоящего гуманитарного духа.

Поэтому профессионального математика не может оставить равнодушным провозглашенная цель "Соросовского Образовательного Журнала", которая, насколько я понимаю, такова: попытаться "продвинутому" школьнику и "творческому" учителю дать почувствовать, чем занимается та или иная наука всерьез в варианте, так сказать, для взрослых. Другое дело, что осуществить такую цель, особенно когда это касается математики с ее наиболее "иерархически" построенным знанием, невероятно трудно, но все равно надо к этому стремиться... (И бороться с соблазном представить крупную научную проблему в виде усложненной олимпиадной задачи – понять будет, конечно, легче, да только что в этом толку?)

Мое вступление, пожалуй, чересчур затянулось. Все же я счел своим долгом, первый раз выступая в качестве рецензента "Соросовского Образовательного Журнала", изложить ту сверхзадачу, которую, как мне кажется, в идеале должны решать статьи этого журнала. Так вот с этих позиций статья С.А. Гомонова кажется мне вполне удачной. На мой взгляд, широкий читатель сможет получить по этой статье определенное представление о том конкретном разделе математики, которым занимается автор – теории граничных значений полианалитических функций.

Материал изложен достаточно живо и увлекательно, причем естественность данного круга вопросов показана с позиций некоторого overview. Попутно автор высказывает несколько здравых мыслей общего характера, в том числе и о психологической новизне его предмета по сравнению с тем, чему учат в школе; эти мысли должны быть интересны как для старшеклассников, так и для их учителей. Порою статья написана довольно шутливо, а местами и нарочито гротескно (иногда, я бы даже сказал, на грани фола). Что ж, на мой взгляд, некоторым блюдам острая приправа не помешает...

Вот несколько замечаний по тексту статьи.

1. Важнейшее во всем комплексном анализе понятие аналитической функции автор дает как бы мельком, среди своих любимых "ПАПов" и "ПАФов", не подчеркивая должным образом его фундаментальный характер. Следовало бы упомянуть о том, что подход, принятый в статье (и восходящий к Риману), – это лишь одно из многих с виду совершенно разных эквивалентных определений этого понятия. (Ведь есть еще подходы Коши, Вейерштрасса, ...). Конечно, подобные комментарии потребуют места, но их можно вставить, скажем, за счет сокращения списка литературы.

Отметим к тому же, что в большинстве стандартных учебников по комплексному анализу функцию называют аналитической (= голоморфной) в данной точке, если она $\mathbb{C}$-дифференцируема в целой окрестности этой точки, то есть требуют больше, чем автор в своем определении.

2. Опять поведем речь о соблюдении должных пропорций. Классическую теорию о классификации изолированных особенностей аналитических функций следует с подобающей торжественностью сформулировать вместе с обсуждением соответствующих примеров до изложения "надстроенных" на этой теореме результатов самого автора. Под последними я имею в виду его действительно весьма симпатичную теорему, как он изволил выражаться, "о великолепной пятерке или три плюс два".

3. На с. 3 слово "выражений" (третья строка) хорошо бы снабдить эпитетом "формальных", а то наш гипотетический школьник или учитель может запротестовать, и будет прав: его не учили складывать действительные числа неведомо с чем.

4. На с. 4 мне неясно, какую мысль автор хочет выразить в абзаце, начинающемся словами "Следует отметить". Может быть, он имеет в виду два (а не три) из указанных ранее свойств?

Но все это, разумеется, мелочи. В целом, по нашему убеждению, статья С.А. Гомонова ЗАСЛУЖИВАЕТ ОПУБЛИКОВАНИЯ В "СОРОСОВСКОМ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ЖУРНАЛЕ".

25.10.1998.

А.Я. Хелемский,
доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ

В Экспертный совет "Соросовского Образовательного Журнала".
О переработанном тексте работы С.А. Гомонова "Предельные множества и изолированные особенности полианалитических функций" (2-й отзыв)

Ознакомившись с переработанным текстом статьи, я вижу, что автор полностью согласился со сделанными мною замечаниями и произвел все необходимые изменения. Мне остается подтвердить свое положительное мнение о работе. Считаю, что она заслуживает опубликования теперь уже без дальнейших исправлений в "Соросовском Образовательном Журнале".

23.06.1999.

С уважением, А.Я. Хелемский

Экспертный совет рекомендует статью для публикации.

А.П. Маркеев,
доктор физ.-мат. наук, профессор МГАИ
Ю.Г. Мартыненко,
доктор физ.-мат. наук, профессор МЭИ
Ю.П. Соловьев,
доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ
В.А. Ильин,
профессор МГУ, академик РАН

В печать.

15 декабря 1999 г.

В.Н. Сойфер,
главный редактор СОЖ, доктор физ.-мат. наук, профессор, иностранный член Национальной академии наук Украины