

# ТУННЕЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ

Н. Б. ДЕЛОНЕ

Московский физико-технический институт, Долгопрудный Московской обл.

## THE TUNNEL EFFECT

N. B. DELONE

*The tunneling of an electron through a potential barrier is, in essence, the basic quantum mechanical effect, which has no analogy in classical mechanics. The tunnel effect is an experimental confirmation of one of the fundamental initial positions of quantum mechanics, which is corpuscular-wave dualism of elementary particles' properties.*

Туннелирование электрона через потенциальный барьер является принципиально квантово-механическим эффектом, который не имеет аналога в классической механике. Туннельный эффект является экспериментальным подтверждением одного из фундаментальных исходных положений квантовой механики – корпускулярно-волнового дуализма свойств элементарных частиц.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

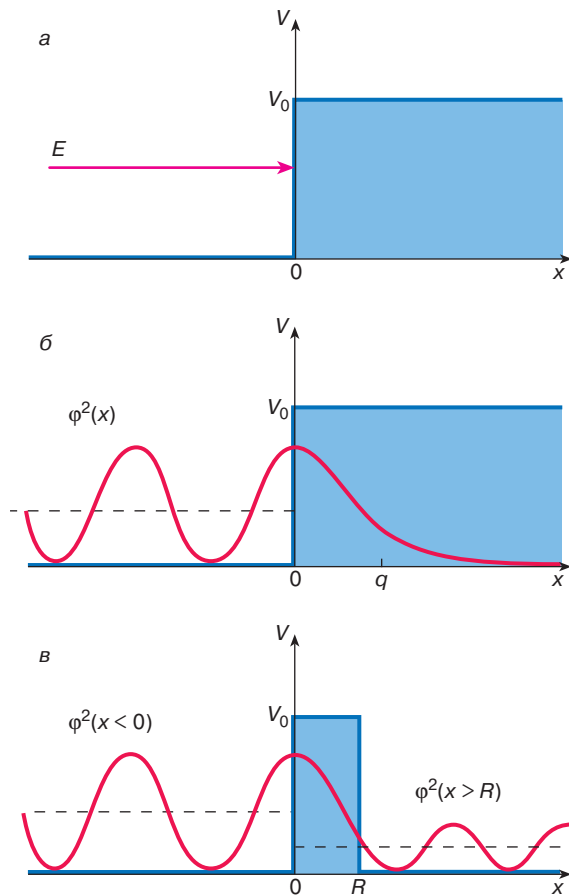
Туннельным эффектом называется возможность элементарной частице, например электрону, пройти (протуннелировать) через потенциальный барьер, когда барьер выше полной энергии частицы. Возможность существования туннельного эффекта в микромире была понята физиками в период создания квантовой механики, в 20–30-х годах нашего века. В дальнейшем за счет туннельного эффекта были объяснены некоторые весьма важные явления, обнаруженные экспериментально в различных областях физики.

Туннельный эффект является принципиально квантово-механическим эффектом, не имеющим аналога в классической механике. В этом основной интерес туннельного эффекта для физики и физиков. В рамках классической механики априорно ясно, что любое материальное тело, имеющее энергию  $E$ , не может преодолеть потенциальный барьер высотой  $V_0$ , если  $V_0 > E$  (рис. 1, а). При падении тела на такой барьер оно может лишь отразиться от него. Это утверждение находится в полном согласии с законом сохранения энергии.

Однако если в качестве материального тела рассмотреть электрон, то нельзя оставаться в рамках классической механики. Действительно, хорошо известно, что электрону присущи как корпускулярные, так и волновые свойства. Длина волны де Бройля для материального тела с массой  $m$  и скоростью  $v$  описывается соотношением

$$\lambda_D = \frac{2\pi\hbar}{mv}, \quad (1)$$

где  $\hbar = h/(2\pi)$ , а  $h$  – постоянная Планка. Если масса  $m$  экстремально мала и скорость  $v$  неэкстремально велика, то длина волны де Бройля может быть немала. Так, например, для электрона, имеющего кинетическую энергию порядка 1 эВ, величина  $\lambda_D$  порядка  $10r_a \sim 10^{-7}$  см, где  $r_a$  – боровский радиус. В атомных масштабах это очень большая величина – на порядок превышающая размер атома!



**Рис. 1.** Столкновение частицы с потенциальным барьером в рамках классической (а) и квантовой (б, в) механики: а –  $E$  – полная энергии частицы,  $V_0$  – высота потенциального барьера, частица движется слева направо; б –  $\varphi^2(x)$  – вероятность найти частицу в точке  $x$ ; в –  $\varphi^2(x > R)$  – вероятность найти частицу за барьером в классически запрещенной области,  $R$  – ширина барьера

Если ширина потенциального барьера  $R \leq \lambda_D$ , то электрон с определенной вероятностью может при падении на барьер оказаться с другой его стороны, электрон протуннелирует через барьер, не изменив своей энергии. В этом качественно состоит сущность туннельного эффекта.

В тех случаях, когда потенциальный барьер создается внешним полем, оно может иметь столь большую напряженность, что вершина потенциального барьера будет ниже энергии частицы. С точки зрения классической механики очевидно, что при этом частица оказывается свободной и с вероятностью, равной единице, уходит. Однако квантовая механика показывает, что это не так. Те же причины, которые обуславливают подбарьерное туннелирование, обуславливают и надбарьерное отражение частицы. При высоте барьера,

равной энергии частицы, вероятность прохождения равна вероятности отражения, то есть равна половине. Вероятность прохождения, равная единице, достигается при большом превышении  $E$  над  $V$ .

Заканчивая это введение, вернемся к самому началу. Хотя очевидно, что туннельный эффект не имеет аналогов в классической механике, интересно отметить, что он имеет аналогию в оптике. Наличие такого аналога неудивительно, так как в основе туннельного эффекта лежат волновые свойства частиц. А между волной вероятности ( $\psi$ -функцией) и электромагнитной волной есть много общего.

Обратимся к оптике и конкретно к явлению полного внутреннего отражения световой волны от границы двух сред при падении волны из среды с большим показателем преломления. При углах падения волны, превышающих предельный угол, преломление не возникает, вся волна отражается от границы раздела. В этом смысле полное внутреннее отражение волны является аналогом отражения частицы от потенциального барьера при  $E < V$  в рамках классической механики. Однако в экспериментах было обнаружено, что свет проникает за границу раздела на глубину порядка длины волны, при этом экспоненциально ослабляясь во второй среде.

Наиболее наглядным является опыт одного из основателей отечественной радиофизики, Л.И. Мандельштама (1879–1944), в котором он изучал отражение света от поверхности люминесцирующего раствора. Проникновение света в раствор наблюдали по возникновению свечения в тонком приповерхностном слое раствора. В рамках электромагнитной теории Максвелла можно качественно и количественно описать этот эффект (см., например, [1]).

## 2. КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТУННЕЛЬНОГО ЭФФЕКТА

Обратимся теперь к описанию туннельного эффекта в рамках квантовой механики. Описание процесса туннелирования частиц через потенциальный барьер содержится в любом курсе квантовой механики. Среди общедоступных курсов наиболее физичное изложение этого вопроса содержится в книге [2]. Ниже будет приведено упрощенное изложение, лишь качественно показывающее существование туннельного эффекта. Это изложение следует первому рассмотрению процесса отражения свободной частицы от силового поля, выполненного в 1928 году в рамках квантовой механики Л.И. Мандельштамом и его учеником М.А. Леонтовичем (впоследствии широко известным теоретиком) в работе “К теории уравнения Шрёдингера”, опубликованной в главном физическом журнале тех лет “Zeitschrift fur Physique”.

Будем предполагать, что потенциальный барьер является стационарным, и исходить из уравнения Шрёдингера в форме, не зависящей от времени:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) = [E - V(x)] \psi(\vec{x}, t). \quad (2)$$

В (2), как и ранее,  $E$  – полная энергия частицы,  $V(x)$  – потенциальный барьер,  $\nabla^2$  – оператор Лапласа, а  $\psi(\vec{x}, t)$  – волновая функция, характеризующая вероятность нахождения частицы в данной точке.

Будем решать не истинную трехмерную задачу, а одномерную задачу. Это позволяет заменить уравнение (2) в частных производных на обычное дифференциальное уравнение с одной независимой переменной  $x$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x, t) = [E - V(x)] \psi(x, t). \quad (3)$$

Зависимость волновой функции от времени описывается экспонентой  $\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$ , так что можно записать волновую функцию в виде

$$\psi(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right). \quad (4)$$

Зависящая от координаты часть волновой функции удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) = [E - V(x)] \varphi(x). \quad (5)$$

Решив уравнение (5) относительно  $\varphi(x)$ , можно получить из (4) выражение для искомой волновой функции  $\psi(x, t)$ . В качестве барьера выберем простейшую ступенчатую форму (рис. 1, б):

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ V_0 > E & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Введя эти упрощения, перейдем к вычислению функции  $\varphi(x)$  для произвольного значения аргумента. Обратимся сначала к области слева от барьера, где  $x < 0$ . В этой области уравнение (5) сводится к уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) = E \varphi(x). \quad (7)$$

Легко установить, что это уравнение имеет два независимых решения  $\exp(ikx)$  и  $\exp(-ikx)$ , где  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ . Таким образом, в этой области волновая функция  $\varphi(x)$  описывается выражением

$$\varphi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx). \quad (8)$$

Как видно из (8), решение в этой области представляет собой осциллирующую функцию, не возрастающую при  $x \rightarrow -\infty$ .

Обратимся теперь к области справа от барьера, где  $x > 0$ . В этой области уравнение (5) сводится к уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) = [E - V_0] \varphi(x). \quad (9)$$

Легко получить два независимых решения этого уравнения, они имеют вид

$$C \exp(-qx) \text{ и } D \exp(qx), \quad \text{где } q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.$$

Второе из этих решений экспоненциально растет с ростом  $x$ , что, очевидно, физически бессмысленно. (Напомним, что исходно предполагается, что  $\varphi(x)$  – волновая функция, характеризующая вероятность нахождения частицы.) Таким образом, остается лишь первое из решений уравнения (9)  $C \exp(-qx)$ , соответствующее экспоненциальному убыванию функции  $\varphi(x)$  с ростом величины  $x$  в области  $x > 0$ .

Теперь остается сшить решения, полученные для областей с  $x < 0$  и  $x > 0$  в точке  $x = 0$ . Константы  $A$ ,  $B$  и  $C$  определяют исходя из очевидного предположения о непрерывности волновой функции и ее первой производной во всей области изменения величины  $x$ .

Окончательное выражение для функции  $\varphi(x)$  имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp(ikx) + \frac{1 - i\sqrt{V_0/E - 1}}{1 + i\sqrt{V_0/E - 1}} \exp(-ikx) & \text{при } x < 0, \\ \frac{2 \exp(-qx)}{1 + i\sqrt{V_0/E - 1}} & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (10)$$

(без ограничения общности можно положить  $A = 1$ ).

Из выражения (10) видно, что при  $x < 0$  функция  $\varphi(x)$  представляет собой суперпозицию двух волн. Одна из волн,  $\exp(ikx)$ , распространяется вправо, в сторону барьера; вторая,  $\exp(-ikx)$ , – влево от барьера. Так как модуль множителя при  $\exp(ikx)$  в выражении (10) равен 1, то амплитуды этих волн равны. Таким образом, слева от барьера, при  $x < 0$ , выражение (8) описывает частицу, падающую на барьер и упруго отражающуюся (рис. 1, б). Этот процесс соответствует предсказаниям классической механики.

Однако из выражения (10) также видно, что при  $x > 0$  волновая функция проникает за барьер в область, запрещенную с точки зрения классической механики. Амплитуда волновой функции за барьером экспоненциально уменьшается при увеличении  $x$ , и при больших  $x$  она стремится к нулю (рис. 1, б):

$$\varphi(x) \approx V \exp(-qx), \quad (11)$$

Таким образом, справа от барьера выражение (10) описывает туннелирование частицы в классически запрещенную область.

Из выражения (10) также можно видеть, что при неограниченно большой высоте барьера ( $V_0 \rightarrow \infty$ ) величина  $q$  стремится к бесконечности. Согласно (10), это означает, что величина  $\varphi(x) = 0$  при  $x > 0$ . Таким образом, при бесконечной высоте барьера мы возвращаемся к классической картине – частица за барьер не проникает, а лишь отражается от него. Это подтверждает, что квантовая картина при небесконечно высоком барьере вполне разумна.

В том случае, когда барьер имеет конечную ширину  $R$  и достаточно узок, так что  $R \leq \lambda_D$ , частица туннелирует за барьер с определенной вероятностью и  $\varphi^2(x > R)$  распространяется вправо в пространстве за барьером (рис. 1, в). При этом сумма вероятностей протуннелировать через барьер и отразиться от него равна единице. Соответственно амплитуда волны, отраженной от барьера, меньше амплитуды волны, падающей на барьер. В соответствии с формулой (11) вероятность туннелирования экспоненциально мала, если барьер неэкстремально узок.

Конкретная форма барьера (который реально никогда не бывает прямоугольным) изменяет количественно вероятность туннелирования, не изменяя той качественной картины, которая получена выше.

Таким образом, задача, поставленная в начале этого раздела, выполнена в рамках квантовой механики: показано существование туннельного эффекта, приводящего к проникновению частицы за барьер, высота которого больше энергии частицы. Решение этой задачи без тех упрощений, которые были сделаны выше, показывает, что результат качественно не отличается от полученного выше.

Из-за недостатка места мы не рассматриваем здесь процесс надбарьерного отражения частиц. Желющие разобраться в нем могут обратиться к упомянутому раньше курсу квантовой механики [2].

Перейдем теперь к краткому рассмотрению ряда основных физических явлений, в которых реализуется туннельный эффект.

### 3. ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ТУННЕЛЬНЫМ ЭФФЕКТОМ

#### $\alpha$ -Распад атомных ядер

Явление радиоактивности было обнаружено А. Беккерелем в самом конце XIX века. Он установил, что атомные ядра спонтанно (самопроизвольно) испускают  $\alpha$ -,  $\beta$ - и

$\gamma$ -лучи, характеризующиеся различной проникающей способностью. Вскоре после этого Э. Резерфорд и М. Кюри установили, что это  $\alpha$ -частицы (ядра гелия), электроны и  $\gamma$ -лучи. В начале XX века был накоплен значительный экспериментальный материал о свойствах радиоактивных ядер. В частности, были измерены периоды полураспада ядер и энергии вылетающих частиц и  $\gamma$ -лучей. Эти данные для  $\alpha$ -частиц оказались на первый взгляд неожиданными. Так, с одной стороны, энергии вылетающих  $\alpha$ -частиц для большого числа различных ядер оказались почти одинаковыми. С другой – периоды полураспада этих же ядер – различались на много порядков величины. Так, например, для  $\alpha$ -распада ядра полония  $^{212}_{84}\text{Po}$  период полураспада порядка  $10^{-7}$  с, а в случае ядра урана  $^{238}_{92}\text{U}$  – порядка  $10^9$  лет. Этот парадокс нашел объяснение лишь в рамках теории туннелирования вылетающих  $\alpha$ -частиц через потенциальный барьер, объяснивший и сам факт  $\alpha$ -распада ядер.

Туннельная теория  $\alpha$ -распада была создана в 20-х годах этого века независимо Г.А. Гамовым, а также Р. Герни и Е. Кондоном. Она аналогична теоретическому описанию туннельного эффекта, приведенному выше, в разделе 2.

На рис. 2 приведена схема туннелирования  $\alpha$ -частицы из ядра. Внутри ядра при  $r < R$ , где  $R$  – радиус ядра, на  $\alpha$ -частицу действуют ядерные силы притяжения, вне ядра при  $r > R$  – силы кулоновского отталкивания от ядра. Таким образом, в области  $r \sim R$  имеется потенциальный барьер. Высота барьера (в случае тяжелых ядер с числом нуклонов больше ста)  $V \approx 25\text{--}30$  МэВ, а энергия  $\alpha$ -частицы  $E \approx 5\text{--}10$  МэВ. Чем меньше  $V$  и больше  $E$ , тем больше проникаемость барьера для  $\alpha$ -частиц и тем меньше период полураспада ядра. Экспоненциальная зависимость проникаемости барьера от разности  $V - E$  (см. раздел 2) обуславливает резкий разброс периодов полураспада для различных ядер.

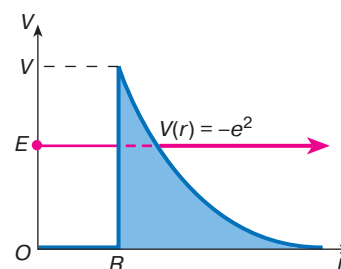


Рис. 2.  $\alpha$ -Распад ядра атома:  $O$  – центр ядра,  $R$  – радиус ядра,  $OR$  – область действия ядерных сил притяжения,  $r > R$  – область кулоновского отталкивания  $\alpha$ -частицы от ядра,  $E$  – энергии  $\alpha$ -частицы,  $V$  – высота барьера

Теория Гамова позволила описать с вполне разумной точностью периоды распада различных ядер во всем огромном диапазоне их величин. Дальнейшие уточнения этой теории привели лишь к небольшим поправкам.

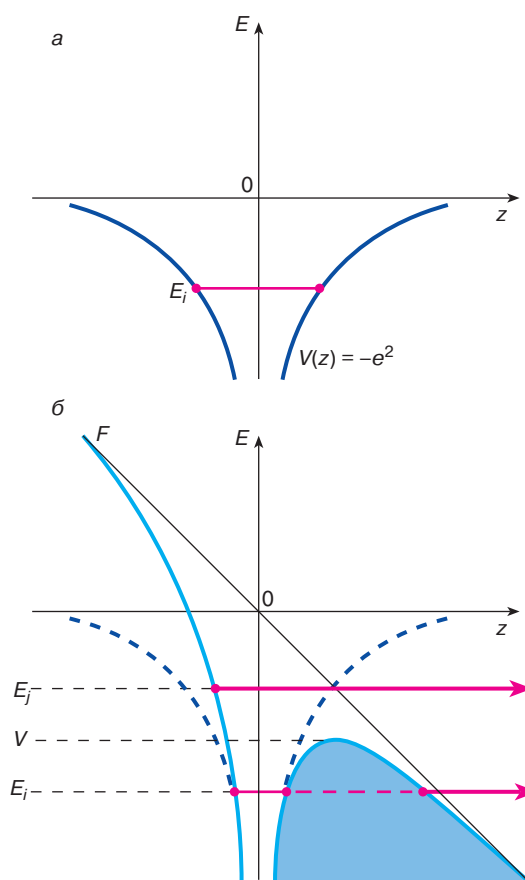
В начале нашего века, в годы создания квантовой механики, успех теории туннелирования  $\alpha$ -частиц из ядер оказался убедительным аргументом в пользу справедливости основ новой квантовой физики, и в первую очередь корпускулярно-волновой природы элементарных частиц.

### Туннельная ионизация атома под действием внешнего электрического поля

В начале XX века много экспериментов было посвящено исследованию атомных спектров поглощения и излучения. Среди них были и эксперименты по изучению изменений спектральных линий под действием внешнего постоянного электрического поля — эффект Штарка [3]. В конце 20-х годов в одном из таких экспериментов Р. Траубенберг получил фотографии спектральных линий, на которых по мере увеличения напряженности поля наблюдался не только сдвиг линий, но и их уширение и исчезновение. Если сдвиг находился в согласии с теорией эффекта Штарка, то и уширение и исчезновение линий в рамках этой теории были необъяснимы.

Однако вскоре оба эти явления были объяснены в рамках теории туннельной и надбарьерной ионизации атомов, развитой независимо К. Ланчосом и Р. Оппенгеймером. В основе этой теории лежало предположение, что атом под действием внешнего поля ионизируется, причем процесс ионизации обусловлен возникновением потенциального барьера, через который туннелирует атомный электрон. Схема этого процесса приведена на рис. 3.

Если нет внешнего поля (рис. 3, а), то электрон, связанный в атоме, находится в кулоновском поле атомного ядра ( $E_i$  — энергия связи). Если внешнее поле включено (например, вдоль оси  $z$ ) (рис. 3, б), то на электрон действует сумма двух полей: кулоновского поля ядра и внешнего поля (с напряженностью  $F$ ). Высота и ширина этого барьера уменьшаются при увеличении напряженности внешнего поля. Атомный электрон может туннелировать через этот барьер или даже просто оказывается свободным при достаточно низком барьере (рис. 3, б). В последнем случае процесс ионизации принято называть надбарьерной ионизацией или надбарьерным развалом атома. Вероятность  $W$  туннелирования экспоненциально зависит от напряженности  $F$  внешнего поля:  $W \sim \exp(-C/F)$ , где  $C$  — константа. Это соотношение хорошо описывает экспериментальные данные. Для критической напряженности поля,



**Рис. 3.** Ионизация атома во внешнем постоянном электрическом поле: а — атом при отсутствии внешнего поля,  $O$  — ядро атома,  $V$  — кулоновский потенциал взаимодействия электрона с ядром,  $E_i$  — энергия электрона, связанного в атоме; б — атом во внешнем поле напряженностью  $F$ ;  $V$  — вершина потенциального барьера,  $V > E_i$  — электрон туннелирует через барьер.  $V < E_i$  — электрон переходит из связанного в свободное состояние над барьером

при которой возникает надбарьерная ионизация, классическая теория дает выражение, вытекающее из равенства энергии связи электрона в атоме  $E_i$  (в частности, потенциала ионизации) и максимума барьера. Оно имеет простой вид:  $F_{кр} \sim E_i^2 / (4Z)$ , где  $Z$  — заряд атомного остова. Это выражение приближенно описывает возникновение надбарьерной ионизации.

В 60-х годах этого века были созданы лазеры. В руках экспериментаторов оказались экстремально сильные световые поля, поэтому возник очевидный интерес физиков к процессу туннельной ионизации атомов в переменном электромагнитном поле. В отличие от постоянного поля в переменном поле барьер возникает периодически то справа от ядра атома (как это изображено на рис. 3, б), то слева за время, равное половине

периода поля. В световом поле это очень малая величина, порядка  $10^{-15}$  с. Очевидно, что атомный электрон должен успеть протуннелировать через барьер за меньшее время. Теоретически было показано, что туннельная ионизация атомов может происходить и в световом поле лазерного излучения [4]. Эксперименты, поставленные в последующие годы, полностью подтвердили эти предположения, и сейчас этот процесс детально изучен [5].

Процесс туннельной ионизации атомов в поле лазерного излучения представляет большой интерес. Дело в том, что при современных сверхсильных полях лазерного излучения субатомной, атомной ( $F_a \sim 10^9$  В/см) и суператомной напряженности этот процесс является определяющим при ионизации газа и создании плазмы. В таких сильных световых полях туннельный эффект обуславливает и отрыв электронов от положительных ионов, приводя к образованию в газе ионов с большой кратностью заряда и большего числа свободных электронов.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заканчивая статью, остается лишь указать (за недостатком места) на другие физические явления, в которых реализуется туннельный эффект. Это в первую очередь автоионизационная (или холодная, полевая) эмиссия электронов из поверхности металла и других электропроводящих сред, широко используемая в электронике.

В полупроводниках в определенных условиях возникает туннельный эффект на  $p-n$ -переходе. Это позволило создать туннельные диоды, имеющие существенные преимущества перед обычными диодами в ширине полосы пропускаемых частот и быстродействии. Туннельный эффект определяет процесс миграции валентных электронов в кристаллической решетке

твердых тел. Туннельный эффект лежит в основе эффекта Джозефсона — протекания сверхпроводящего тока между двумя сверхпроводниками через экстремально тонкую прослойку из диэлектрика.

Из приведенного материала видно, что туннельный эффект играет существенную роль в самых различных областях физики и техники.

Однако наиболее широкий интерес к туннельному эффекту обусловлен тем, что это принципиально квантово-механический эффект, не имеющий аналога в классической механике. Своим существованием туннельный эффект подтверждает основополагающее положение квантовой механики — корпускулярно-волновой дуализм свойств элементарных частиц.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Матвеев А.Н.* Оптика. М.: Высш. шк., 1985. § 16-18.
2. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976. Гл. XVI.
3. *Делоне Н.Б.* Возмущение атомного спектра в переменном электромагнитном поле // Соросовский Образовательный Журнал. 1998. № 5. С. 90–95.
4. *Келдыш Л.В.* // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1945.
5. *Делоне Н.Б., Крайнов В.П.* // Успехи физ. наук. 1998. Т. 168. С. 531.

*Рецензенты статьи* В.П. Крайнов, Ю.В. Копаев

\* \* \*

Николай Борисович Делоне, профессор, доктор физико-математических наук, ведущий сотрудник Института общей физики РАН. Специалист в области атомной и лазерной физики. Автор нескольких монографий, посвященных взаимодействию лазерного излучения с веществом, многих обзоров и более 150 научных работ.